Mathematica软件在无穷级数教学中的应用*

周建华,刘 智
(赣南教育学院,江西 赣州 341000)

【摘 要】无穷级数是高等数学教学中的一个难点,其内容高度抽象。如何生动形象地把无穷级数讲授出来,是数学教师经常探索的问题。利用Mathematica软件强大的符号计算和图形处理功能,可以加强这部分教学内容的几何直观,弥补学生空间想象能力的不足。实践证明,教学中辅以Mathematica软件,借助于多媒体技术实现抽象数学概念和理论的直观可视化,不仅可以提高学生的学习兴趣、加深对教学内容的理解,而且还可以开展研究性学习,丰富学生的创造性思维。

【关键词】Mathematica软件;无穷级数;教学研究
【中图分类号】O13-42 【文献标识码】B 【文章编号】1673-1891(2009)01-0120-04

1 引言

在美国数学学会公报里,SaunderMaclane提出应把:“直觉—探试—出错—思考—猜想—证明”作为理解数学的一个过程。然而目前我国大部分数学课堂推崇的却是:“课堂讲授—记忆—测验”模式。这种传统的教学方式使大部分学生觉得数学枯燥难懂,许多学生学了很多年数学,成绩也很好,但却从来没有真正理解所学的东西。传统的数学教学方式过于强调对学生逻辑推理能力的培养。教师往往只花很少的时间讲授图形,对函数性质及所对应图形的特点也仅简单一提,很少通过具体的函数图形说明其性质,让学生理解这些抽象概念。事实上,学生恰恰难在如何将抽象概念变成直观的、可视的图形上。往往已经作出了正确的证明,却不能理解为什么是这样。如果我们先让学生做一些与该项证明有关的实验,通过实验证实了结果之后再来证明,这样是否会更好呢? 笔者认为,教师的任务应该是提出基本问题,引进新思想,让学生去做试验,从而发现并解释一些现象。这样使学生由被动接受变成主动发现,增强其学习数学的兴趣,加深其对所学知识的理解。

Mathematica是目前广泛使用的一个数学软件包,通过编制简单的程序解决大量的数学问题,其操作简单、易学、好用。该软件还具有很强的绘图功能,可以绘制数学里的各种图形。笔者认为将Mathematica应用到教学中,用现代化的数学实验室取代传统的数学教室,可以在很大程度上解决传统教学中所存在的许多问题。教师用一种可视的,体验的形式传播新思想,使学生在使用数学语言之前通过这些方式获得新思想。这种教学方式给学生留有创造发挥的余地,他们可以在计算机上做实验,教师引导他们发现规律,然后学生就有动力试图进行解释,而一个好的解释实际上就包含着一个形式证明的重要思想。本文将介绍Mathematica软件在无穷级数教学中的应用。

2 问题提出

在对p-级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$的收敛性的讨论中,教材中利用理论推导得到结论:$p>1$收敛;$p\leq 1$发散。理论证明虽然严格,但缺乏几何直观,如何让学生更加直观地看到级数收敛性的变化? 特别地,当p=1时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$被称为调和级数,问调和级数的发散规律是什么?

3 解题思路

我们利用Mathematica软件强大的绘图功能尝试绘制几个有代表性的p-级数:$p=\frac{1}{2}$,p=2,p=1时p-级数的部分和数列的图形,在课堂中演示给学生,让学生直观地体会到级数的收敛与发散。

4 实验过程

4.1 利用Mathematica软件绘制级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的部分和数列1000项和与2000项和的图形。打开Mathematica ,输入命令

收稿日期:2008-12-16
*基金项目:2008年江西省省级教改立项课题“Mathematica软件在高师院校《高等数学》教学中的应用研究”(项目编号:JXJG-08-71-3)。

作者简介:周建华(1985-),男,江西永新人,助教,主要从事应用数学、金融数学方向的教学与研究。

```
Clear[s,n];
s[n_]:=NSum[1/(k^2),{k,1,n}];
t1=Table[{k,s[k]},{k,1,1000}];
t2=Table[{k,s[k]},{k,1,2000}];
p1=ListPlot[t1,PlotStyle->PointSize[0.001]];
p2=ListPlot[t2,PlotStyle->PointSize[0.001]];
```

运行此程序,输出图1与图2。

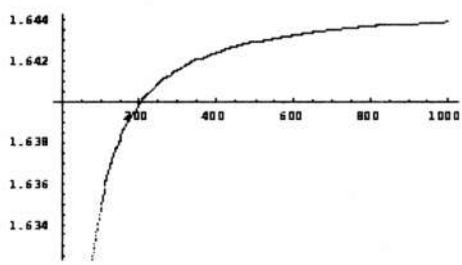

图1　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的部分和数列1000项的图形

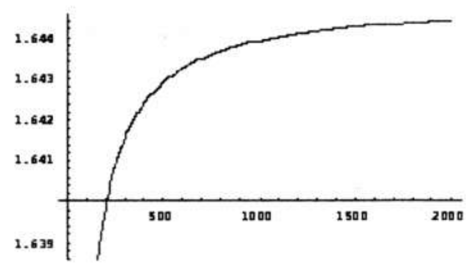

图2　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的部分和数列2000项的图形

通过对图1与图2的观察,可以看到级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的部分和数列越来越逼近一个常数$S=1.645$(注:通过理论验证$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\approx 1.64493$),所以它收敛。

4.2 利用Mathematica软件绘制级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$的部分和数列1000项和与2000项和的图形。输入命令

```
Clear[s,n];
s[n_]:=NSum[1/Sqrt[k],{k,1,n}];
t3=Table[{k,s[k]},{k,1,1000}];
t4=Table[{k,s[k]},{k,1,2000}];
p3=ListPlot[t3,PlotStyle->PointSize[0.001]];
p4=ListPlot[t4,PlotStyle->PointSize[0.001]];
```

运行此程序,输出图3和图4。通过对图3与图4的观察,可以看到部分和数列越来越大,不能和某数接近,所以它发散。

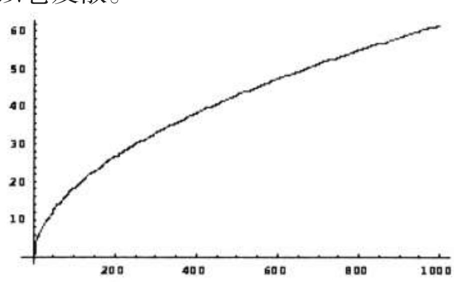

图3　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$的部分和数列1000项的图形

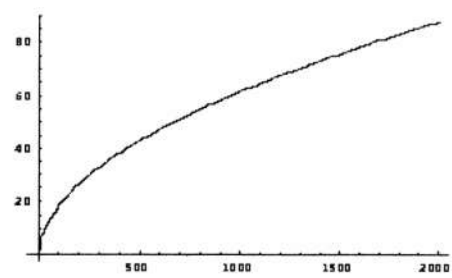

图4　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$的部分和数列2000项的图形

4.3 利用Mathematica软件绘制级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的部分和数列1000项和与2000项和的图形。输入命令

```
Clear[s,n];
s[n_]:=NSum[1/k,{k,1,n}];
t5=Table[{k,s[k]},{k,1,1000}];
t6=Table[{k,s[k]},{k,1,2000}];
p5=ListPlot[t5,PlotStyle->PointSize[0.001]];
p6=ListPlot[t6,PlotStyle->PointSize[0.001]];
```

运行此程序,输出图5和图6。通过对两个图的观察,可以看到部分和数列越来越大,不能和某数接近,所以它发散。

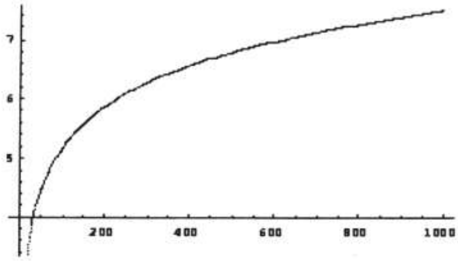

图5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的部分和数列1000项的图形

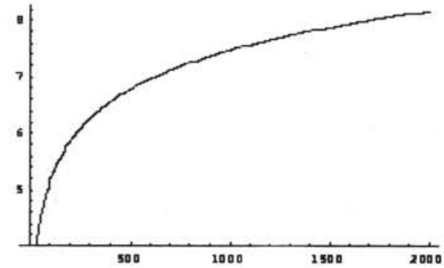

图6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的部分和数列2000项的图形

5 问题解答

以上从三个方面探讨了p-级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$的收敛性，从中可以进一步发现：当$p>1$时，p-级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛；当$p\leq 1$，p-级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散。借助于几何直观方法，使得该级数的收敛性一目了然。类似于级数数学中有很多这样晦涩的概念、定理，如果引入直观的图形语言，将变得通俗易懂而容易被学生接受和记忆。

6 探索发现

我们仔细观察和分析调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的部分和数列1000项和与2000项和的图形，从散点图上发现它与自然对数ln x很像，将自然对数ln x与散点图画在一起来比较。输入命令

p7=Plot[Log[x],{x,1,1000}];

p8=Show[p5,p7]

运行程序，输出图7和图8。

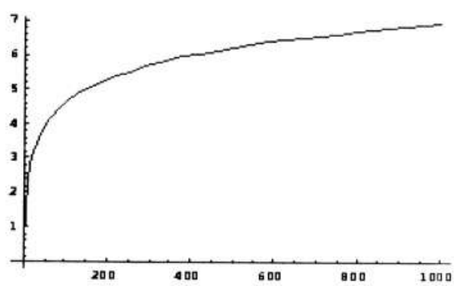

图7 函数ln x的图形

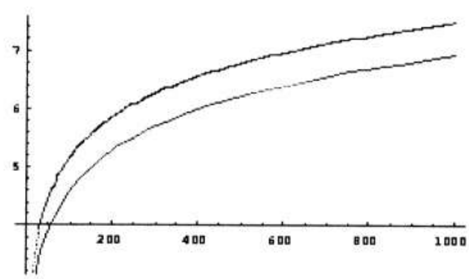

图8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$前1000项与ln x对比图

对比级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的部分和数列1000项和函数ln x的图形可知，虽然没有重合，但具有随着自变量的增加，对应的函数值相差接近一个常数的特征。是否真的相差一个常数？选择一个常数做实验来证实这一猜想。取n=2000时两个函数之差来确定这个常数，然后把此常数加在对数ln x上，将其再与散点图画在一起进行比较。输入命令

v=N[s[2000]-Log[2000]]

运行程序，输出

v=0.577466

输入命令

p9=Plot[Log[x]+0.577466,{x,1,1000}];

p10=Show[p5,p9]

运行程序，输出图9和图10。

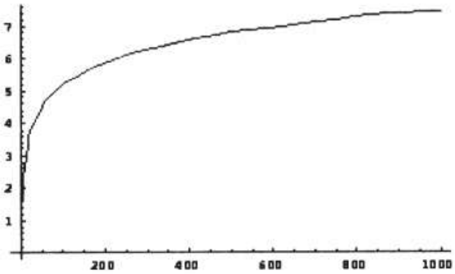

图9　函数ln x+0.577466的图形

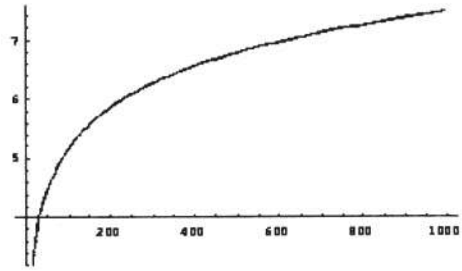

图10　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$前1000项与ln x+0.577466对比图

图10中显示这两个函数几乎重合，这个结果提示我们，可以猜想：极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right)\approx 0.577$$

因此，调和级数部分和的发散情况与函数ln x+0.577在x=n的取值情况大致相同。

（注：已经证明极限$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right)$是存在的，其值称为欧拉（Euler）常数，记为 $\nu=0.5772156649\cdots$目前尚未明确它是否为有理数。）

通过这样的引导、探索和发现，学生就较有兴趣去了解p-级数，进而查阅相关资料探索并研究p-级数的有关性质。

7 结束语

将Mathematica软件和多媒体现代化教学手段应用于无穷级数教学，可以完成公式演算、数值计算、图形绘制等工作。一方面可以加强几何直观，让学生通过对数学现象的深入观察，体验无穷级数有关理论的基本思想和典型方法，加深对抽象概念的感性认识；另一方面，学生还可以利用Mathematica软件，运用无穷级数的理论和技巧，开展研究性学习，丰富其创造性思维。

注释及参考文献：

[1]李卫国.高等数学实验课[M].北京：高等教育出版社，施普林格出版社，2000.
[2]同济大学应用数学系.高等数学(第5版)[M].北京：高等教育出版社，2002.
[3]郭锡伯.高等数学实验课讲义[M].北京：北京标准出版社，1998.
[4]王兵团，桂文豪.数学实验基础[M].北京：北方交通大学出版社，2003.
[5]张二艳.Mathematica软件在高等数学教学中的应用[J].北京印刷学院学报，2006，14(2):77-80.

The Application of Mathematica Software to Infinite Series Teaching

ZHOU Jian-hua，LIU Zhi

（Gannan Education College，Ganzhou，Jiangxi 341000）

Abstract: Due to its highly abstract content, infinite series is a difficult point in the teaching of higher mathematics. How to teach the infinite series vividly and appropriately is always in the mind of a math teacher. Mathematica software，with a powerful computing of symbols，and graphic functions，can enhance the geometrical visual of teaching this content，which can also make up for students’ deficiency in spatial imagination. Practice has proved that teaching with Mathematica software and multi-media technology which visualize abstract mathematical concepts and theories can not only arouse students’ interest in study and deepen their understanding of the content but also develop their inquiry learning and their creative thinking as well.

Key words: Mathematica software；Infinite series；Teaching study