用初等变换法判断实二次型的类型

陈利娅,胡劲松
(西华大学 数学与计算机学院,四川 成都 610039)

【摘 要】引入初等合同变换,将实对称矩阵化为对角矩阵,得到实二次型的一个标准形,从而可以用初等合同变换来判断实二次型的类型。同时也给出了正(负)定二次型的一个必要条件和不定二次型的一个充分条件。该方法易于理解,简单实用,计算量小。

【关键词】初等合同变换;实二次型;实对称矩阵
【中图分类号】O151.2 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2009)01-0030-03

引言

在科学技术和经济管理领域中的许多数学模型都常常需要将一个给定的实二次型化为标准形[1-3],进而判断该实二次型的类型[4-7]。在一般教材[8,9]里面,判断一个给定的实二次型的类型的方法通常是用顺序主子式法和特征值法。我们知道,顺序主子式法一般只能判断正定二次型和负定二次型,且要计算很多个行列式(即顺序主子式)的值;特征值法虽然可以判断各种类型的二次型,但要求出该二次型的矩阵的特征值也不是很容易的事情。本文介绍一种新的方法——初等合同变换法来判断实二次型的类型。该方法只涉及矩阵的初等变换,所以步骤单一、运算量小、易于掌握,最有效、最实用。

1 主要结果

定义 对于矩阵A,称如下三种初等变换为初等合同变换:

(ⅰ)交换A的第i行r_i与第j行r_j的位置得A_1,紧接着交换A_1的第i列c_i与第j列c_j的位置;

(ⅱ)A的第i行r_i乘以非零数k得A_1,紧接着A_1的第i列c_i乘以非零数k;

(ⅲ)A的第i行r_i的k倍加到第j行r_i上得A_1;紧接着A_1的第i列c_i的k倍加到第j列c_j上。

由定义知,任意的实对称矩阵经过初等合同变换后仍然是实对称矩阵,且任意实对称矩阵都可以经过若干次初等合同变换化为对角矩阵。

定理 设A是n元实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵,若矩阵A经过一系列的初等合同变换化为对角矩阵$\Lambda=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,则

(ⅰ)当$\forall d_1>0(i=1,2,\cdots,n)$时,二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为正定二次型;

(ⅱ)当$\forall d_1\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$且至少有一个为0时,二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为半正定二次型。

(ⅲ)当$\forall d_1<0(i=1,2,\cdots,n)$时,二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为负定二次型;

(ⅳ)当$\forall d_1\leqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$且至少有一个为0时,二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为半负定二次型;

(ⅴ)当$d_1(i=1,2,\cdots,n)$中有正数也有负数时,二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为不定二次型。

证根据初等变换与初等矩阵的关系:若对矩阵A进行一次初等合同变换,就相当于对矩阵A左乘一个相应初等矩阵P^T_i,同时对矩阵A右乘一个相应初等矩阵P_i。

由于A是n元实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵,则A是n阶实对称矩阵。如果令P_i和$P^T_i(l=1,2,\cdots,m)$都是初等矩阵(即它们都是由单位矩阵E经过一次初等变换得到的),那么n阶实对称矩阵A经过一系列(这里假设总共进行了m次)的初等合同变换化为对角矩阵$\Lambda=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$的过程为:

$$A\to P^T_1AP_1\to P^T_2P^T_1AP_1P_2\to\cdots\to P^T_m\cdots P^T_2P^T_1AP_1P_2\cdots P_m=\Lambda \tag{1}$$

即$P^T_mP^T_{m-1}\cdots P^T_2P^T_1AP_1P_2\cdots P_m=\Lambda$

设$C=P_1P_2\cdots P_m$,则C是n阶可逆矩阵(因为它是m个n阶初等矩阵的乘积),且$C^T=P^T_mP^T_{m-1}\cdots P^T_2P^T_1$,于是存在n阶可逆矩阵C,使得$C^TAC=\Lambda$,即存在非退化线性变换X=CT,使原二次型化为标准形:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX=Y^TC^TACY=Y^T\Lambda Y=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2 \tag{2}$$

其中$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$,$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$。即对角矩阵$\Lambda=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$就是原二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的一个标准形所对

收稿日期:2009-01-27

作者简介:陈利娅(1972-),女,四川新都人,讲师,主要从事大学数学的教学及研究。

应的矩阵。从而再由惯性定律和二次型类型的定义[8]可得，定理成立。

2 应用举例

例1 判断二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$的类型。

解 将该二次型的矩阵A进行初等合同变换：

$$A=\begin{pmatrix}5&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\xrightarrow[5r_3,5c_3]{5r_2,5c_2}\begin{pmatrix}5&10&-20\\10&25&-50\\-20&-50&125\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2-2c_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}5&0&-20\\0&5&-10\\-20&-10&125\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+4c_1]{r_3+4r_1}\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&-10\\0&-10&45\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+2c_2]{r_3+2r}\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&25\end{pmatrix}$$

于是，该二次型的一个标准形对应的对角矩阵Λ的主对角线上的元素中，$d_1=5$，$d_2=5$，$d_3=25$。由定理知，该二次型是正定二次型。

这里先将矩阵A第2、3行，第2、3列同时乘以5，使矩阵A位于a_{11}位置上的元素是位于a_{21}、a_{31}、a_{12}和a_{13}位置上的元素的约数，是为了使运算过程中不出现分数，以减少运算量。一般地，在用初等合同变换法来判断n元实二次型f的类型时，总可以在运算过程中运用相同的方法来简化运算。

例2 判断二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$的类型。

解 将该二次型的矩阵A进行初等合同变换：

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&-2\\-1&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_1+c_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&0&-2\\-3&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[2c_2,2c_3]{2r_2,2r_3}\begin{pmatrix}2&2&-6\\2&0&-8\\-6&-8&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2-c_1,c_3+3c_1]{r_2-r_1,r_3+3r_1}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-18\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3-c_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-16\end{pmatrix}$$

于是，该二次型的一个标准形对应的对角矩阵Λ的主对角线上的元素中，$d_1=2$，$d_2=-2$，$d_3=-16$。由定理知，该二次型是不定二次型。

我们注意到，在对n阶实对称矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$进行初等合同变换的时候，矩阵A的主对角线上的元素a_{ii} $(i=1,2,\cdots,n)$的位置可以相互对调。例如，交换A的第1行与第2行的位置，紧接着交换第1列与第2列的位置，就可以对调a_{11}与a_{22}的位置。

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\xrightarrow[c_1\leftrightarrow c_2]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}a_{22}&a_{21}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\a_{12}&a_{11}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{32}&a_{31}&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n2}&a_{n1}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

这也说明在n元实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中，变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的位置关系是对称的。同时，从例1可以看出，在用初等合同变换将实对称矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$化为对角矩阵Λ的过程中，对角矩阵Λ的主对角线上的元素$d_1,d_2,\cdots,d_n$是逐一被确定的，且d_1通常可以取a_{11}（当$a_{11}\neq 0$）。于是很容易推得二次型正（负）定的一个必要条件和二次型不定的一个充分条件：

推论1 若n元实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为正（负）定，则该二次型的矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的主对角线上的元素a_{ii} $(i=1,2,\cdots,n)$全大于（小于）零。

推论2 若n元实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的主对角线上的元素a_{ii} $(i=1,2,\cdots,n)$有正数也有负数时，则该二次型是不定二次型。

另外，在用初等合同变换将实对称矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$化为对角矩阵Λ的过程中，当先出现的$d_1,d_2,\cdots,d_i$中一旦出现既有正数又有负数时，就可以终止运算，从而知该二次型必为不定二次型。

例3 判断二次型

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+4x_4^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3+6x_1x_4+2x_2x_4$的类型。

解 将该二次型的矩阵A进行初等合同变换：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-4&3\\2&2&2&-1\\-4&2&2&0\\3&-1&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{合同变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-2&10&-7\\0&10&-14&12\\0&-7&12&-5\end{pmatrix}$$

由此可知，该二次型的一个标准形对应的对角矩阵Λ的主对角线上的元素中，$d_1=1$，$d_2=-2$，(d_3和d_4暂时未确定符号)，故其一定是不定二次型。

3 结束语

在定理的证明过程中，我们注意到$P_1,P_2,\cdots,P_m$和$P_1^T,P_2^T,\cdots,P_m^T$都是初等矩阵，由于$C=P_1P_2\cdots P_m$，则$EP_1P_2,\cdots P_m=C$，$P_m^T\cdots P_2^T,P_1^TE=C^T$，根据初等变换与初等矩阵的关系，有：

$E\xrightarrow{\text{初等列变换}}EP_1\xrightarrow{\text{初等列变换}}EP_1P_2\rightarrow\cdots\rightarrow EP_1P_2\cdots P_m=C$，

$E\xrightarrow{\text{初等列变换}}P_1^TE\xrightarrow{\text{初等列变换}}P_2^TP_1^TE\rightarrow\cdots\rightarrow P_m^TP_{m-1}^T\cdots P_2^TP_1^TE=C^T$，

于是结合(1)式，对矩阵$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}_{2n\times n}$施以相应于右乘$P_1,P_2,\cdots,P_m$的初等列变换，同时再对A施以相应于左乘$P_1^T,P_2^T,\cdots,P_m^T$的初等行变换，当$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}_{2n\times n}$中的实对称矩阵A变为对角矩阵$\Lambda=diag(d_1,d_2,\cdots,d_n)$时，$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}_{2n\times n}$中的单位矩阵E就变为可逆矩阵C；同理，对矩阵$(A\ E)_{n\times 2n}$施以相应于左乘$P_1^T,P_2^T,\cdots,P_m^T$的初等行变换，同时再对A施以相应于右乘$P_1^T,P_2^T,\cdots,P_m^T$的初等列变换，当$(A\ E)_{n\times 2n}$中的实对称矩阵A变为对角矩阵$\Lambda=diag(d_1,d_2,\cdots,d_n)$时，$(A\ E)_{n\times 2n}$中的单位矩阵E就变为可逆矩阵$C^T$。即：

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{同类型的初等行、列变换}}\begin{pmatrix}\Lambda\\C\end{pmatrix}$$

或

$$(A\ E)\xrightarrow{\text{同类型的初等行、列变换}}(\Lambda\ C^T)$$

这样，我们就可以找到(2)式中的具体的非退化线性变换X=CY。这里的矩阵C也就是文[10]中的合同变换矩阵。

注释及参考文献：

[1]徐香勤 张小勇.基于初等变换的二次型标准化[J].河南教育学院学报(自然科学版)，2007,16(3),69-70.
[2]白颉.化实二次型为标准型的一种新方法[J].太原大学教育学院学报，2008,26(2),111-112.
[3]李大林.实对称行列式表示的二次型的标准化方法[J].柳州职业技术学院学报，2008,8(1),46-49
[4]张景晓 李桂荣 孔淑霞.不定二次型的判定及其分类[J].聊城大学学报(自然科学版)，2007,20(2),27-42.
[5]刘万霞.二次型的有定性[J].内蒙古电大学刊，2008(5),58-59.
[6]陈绍东，黄娜.二次型理论在极值方面的应用[J].内江科技，2008，29(9),94-115.
[7]韩凌燕.二次型化简二次曲线方法的探究[J].山东科学，2008,21(2),52-54.
[8]北京大学数学系.几何与代数教研室代数小组编.高等代数(第二版)[M].北京:高等教育出版社,1978.
[9]张慎语，周厚隆编.线性代数[M].北京:高等教育出版社,2002.
[10]雷英果.相似变换阵与合同变换阵的初等变换求法[J].工科数学，2001(4)：77-80.

Deciding the Type of the Real Quadratic Form by Elementary Congruence Transformation

CHEN Li-ya，HU Jin-song

(College of Mathematics and Computer Engineering，Xihua University，Chengdu，Sichuan 610039)

Abstract: By introducing elementary congruence transformation, a symmetric matrix is exchanged to a diagonal matrix and a standard form is obtained. So the type of the real quadratic form can be decided. A necessary condition of the positive (negative) quadratic form and a sufficient condition of the indefinite quadratic form are presented. The method is easy to understand and costs little computation.

Key words: Elementary congruence transformation; Real quadratic form; Symmetric matrix