第23卷第1期 西昌学院学报·自然科学版 Vol.23,NO.1
2009年3月 Journal of Xichang College·Natural Science Edition Mar.,2009

各种截集形式的粗糙模糊集的构造性质

何天荣

（云南民族大学 数学与计算机科学学院,云南 昆明 650031）

【摘 要】本文在Pawlak近似空间中引入了λ-上截集、强λ-上截集,λ-下截集、强λ-下截集,λ-上重截集、强λ-上重截集,λ-下重截集、强λ-下重截集的概念,系统地讨论了基于各种截集形式的粗糙模糊集的构造性质,得出了基于模糊等价关系的各种截集形式的粗糙模糊集的表现定理和扩张定理并给出了系统的证明。

【关键词】粗糙模糊集;λ-截集

【中图分类号】O159 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2009)01-0023-04

1 基本概念

定义1.1[4] 设(U,R)是近似空间,R是论域U上的一个等价关系。若A是U上的一个模糊集合,则A关于(U,R)的一对下近似$\underline{A}$和上近似$\overline{A}$定义为U上的一对模糊集合,其隶属函数分别定义为

$$\underline{A}(x)=\inf\{A(y)\mid y\in[x]_R\}\ x\in U$$

$$\overline{A}(x)=\sup\{A(y)\mid y\in[x]_R\}\ x\in U$$

其中,$[x]_R$表示元素x在关系R下的等价类。若$\underline{A}=\overline{A}$,则称A是可定义的,否则称A是粗糙模糊集(Rough Fuzzy Set)。称$\underline{A}$是A关于(U,R)的正域,称$\sim\overline{A}$是A关于(U,R)的负域,称$\overline{A}\cap(\sim\overline{A})$为A的边界。

定义1.2[6] 设A是论域U上的一个模糊集,$\lambda\in[0,1]$

（1）$\underline{A}_\lambda=\{x\mid x\in U,\underline{A}(x)\geq\lambda\}$, $\underline{A}_\lambda^s=\{x\mid x\in U,\underline{A}(x)>\lambda\}$,

$\overline{A}_\lambda=\{x\mid x\in U,\overline{A}(x)\geq\lambda\}$, $\overline{A}_\lambda^s=\{x\mid x\in U,\overline{A}(x)>\lambda\}$,

分别称为$\underline{A}$,$\overline{A}$的λ-上截集,强λ-上截集。

（2）$\underline{A}^\lambda=\{x\mid x\in U,\underline{A}(x)<\lambda\}$, $\underline{A}_s^\lambda=\{x\mid x\in U,\underline{A}(x)\leq\lambda\}$,

$\overline{A}^\lambda=\{x\mid x\in U,\overline{A}(x)<\lambda\}$, $\overline{A}_s^\lambda=\{x\mid x\in U,\overline{A}(x)\leq\lambda\}$,

分别称为$\underline{A}$,$\overline{A}$的λ-下截集,强λ-下截集。

（3）$\underline{A}_{[\lambda]}=\{x\mid x\in U,\underline{A}(x)\geq\lambda^c\}$, $\underline{A}_{[\lambda]}^s=\{x\mid x\in U,\underline{A}(x)>\lambda^c\}$,

$\overline{A}_{[\lambda]}=\{x\mid x\in U,\overline{A}(x)\geq\lambda^c\}$, $\overline{A}_{[\lambda]}^s=\{x\mid x\in U,\overline{A}(x)>\lambda^c\}$,

分别称为$\underline{A}$,$\overline{A}$的λ-上重截集,强λ-上重截集。

（4）$\underline{A}^{[\lambda]}=\{x\mid x\in U,\underline{A}(x)<\lambda^c\}$, $\underline{A}_s^{[\lambda]}=\{x\mid x\in U,\underline{A}(x)\leq\lambda^c\}$,

$\underline{A}_s^{[\lambda]}=\{x\mid x\in U,\underline{A}(x)\leq\lambda^c\}$, $\overline{A}_s^{[\lambda]}=\{x\mid x\in U,\overline{A}(x)\leq\lambda^c\}$,

分别称为$\underline{A}$,$\overline{A}$的λ-下重截集,强λ-下重截集。其中$\lambda^c=1-\lambda$。

2 基于各种截集形式的粗糙模糊集的分解定理[7]

定义2.1[5] 设A是论域U上的一个模糊集,$\lambda\in[0,1]$。对λ及U的子集A,分别定义U的模糊子集λA及λ·A如下:

$$(\lambda A)(x)=\begin{cases}\lambda & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}\qquad(\lambda\cdot A)(x)=\begin{cases}\lambda & x\in A\\ 1 & x\notin A\end{cases}\tag{2.1}$$

设(U,R)是近似空间,U上全体模糊集记为F(U),A是论域U上的一个模糊集,记为A∈F(u),$\underline{A}$,$\overline{A}$是一对下近似和上近似,则:

定理2.2（1）$\underline{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\underline{A}_\lambda=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\underline{A}_\lambda^s$,$\overline{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\overline{A}_\lambda=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\overline{A}_\lambda^s$ （2.2）

（2）设H:[0,1]→F(u),满足:$\underline{A}_\lambda^s\subseteq\underline{H}(\lambda)\subseteq\underline{A}_\lambda$,$\overline{A}_\lambda^s\subseteq\overline{H}(\lambda)\subseteq\overline{A}_\lambda$则

① $\underline{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\underline{H}(\lambda)$,$\overline{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\overline{H}(\lambda)$ （2.3）

② $0<\lambda_1<\lambda_2\leq1$时,$\underline{H}(\lambda_1)\supseteq\underline{H}(\lambda_2)$,$\overline{H}(\lambda_1)\supseteq\overline{H}(\lambda_2)$ （2.4）

收稿日期:2008-12-28

作者简介:何天荣(1979-),女,云南迪庆人,丽江师范高等专科学校教师,在读硕士研究生,研究方向:粗糙集理论及应用,模糊系统理论及应用。

③ $\underline{A}_{\lambda}=\bigcap_{\alpha<\lambda}\underline{H}(\alpha),\ \underline{A}_{\lambda}^{s}=\bigcup_{\alpha>\lambda}\underline{H}(\alpha),\ \overline{A}_{\lambda}=\bigcap_{\alpha<\lambda}\overline{H}(\alpha),\ \overline{A}_{\lambda}^{s}=\bigcup_{\alpha>\lambda}\overline{H}(\alpha)$ (2.5)

定理2.3（1）$\underline{A}=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\underline{A}^{\lambda}=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\underline{A}_{s}^{\lambda},\ \overline{A}=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\overline{A}^{\lambda}=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\overline{A}_{s}^{\lambda}$ (2.6)

（2）设H:[0,1]→F(u),满足:$\underline{A}^{\lambda}\subseteq\underline{H}(\lambda)\subseteq\underline{A}_{s}^{\lambda},\ \overline{A}^{\lambda}\subseteq\overline{H}(\lambda)\subseteq\overline{A}_{s}^{\lambda}$ 则

① $\underline{A}=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\underline{H}(\lambda),\ \overline{A}=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\overline{H}\bullet(\lambda)$ (2.7)

② 0<λ$_1$<λ$_2$≤1时,$\underline{H}(\lambda_1)\subseteq\underline{H}(\lambda_2),\ \overline{H}(\lambda_1)\subseteq\overline{H}(\lambda_2)$ (2.8)

③ $\underline{A}^{\lambda}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\underline{H}(\alpha),\ \underline{A}_{s}^{\lambda}=\bigcap_{\alpha>\alpha}\underline{H}(\alpha),\ \overline{A}^{\lambda}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\overline{H}(\alpha),\ \overline{A}_{s}^{\lambda}=\bigcap_{\alpha>\alpha}\overline{H}(\alpha)$ (2.9)

定理2.4（1）$\underline{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda^{c}\underline{A}_{[\lambda]}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda^{c}\underline{A}_{[\lambda]}^{s},\ \overline{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda^{c}\overline{A}_{[\lambda]}^{s}\supseteq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda^{c}\overline{A}_{[\lambda]}$ (2.10)

（2）设H:[0,1]→F(u),满足:$\underline{A}_{[\lambda]}^{s}\subseteq\underline{H}(\lambda)\subseteq\underline{A}_{[\lambda]},\ \overline{A}_{[\lambda]}^{s}\subseteq\overline{H}(\lambda)\subseteq\overline{A}_{[\lambda]}$则

① $\underline{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda^{c}\underline{H}(\lambda),\ \overline{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda^{c}\overline{H}(\lambda)$ (2.11)

② 0<λ$_1$<λ$_2$≤1时,$\underline{H}(\lambda_1)\supseteq\underline{H}(\lambda_2),\ \overline{H}(\lambda_1)\supseteq\overline{H}(\lambda_2)$ (2.12)

③ $\underline{A}_{\lambda}=\bigcap_{\alpha<\lambda}\underline{H}(\alpha),\ \underline{A}_{\lambda}^{s}=\bigcup_{\alpha>\lambda}\underline{H}(\alpha),\ \overline{A}_{\lambda}=\bigcap_{\alpha<\lambda}\overline{H}(\alpha),\ \overline{A}_{\lambda}^{s}=\bigcup_{\alpha>\lambda}\overline{H}(\alpha)$ (2.13)

定理2.5（1）$\underline{A}=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda^{c}\bullet\underline{A}^{[\lambda]}=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda^{c}\bullet\underline{A}_{s}^{[\lambda]},\ \overline{A}=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda^{c}\bullet\overline{A}^{[\lambda]}=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda^{c}\bullet\overline{A}_{s}^{[\lambda]}$ (2.14)

（3）设H:[0,1]→F(u),满足:$\underline{A}^{[\lambda]}\subseteq\underline{H}(\lambda)\subseteq\underline{A}_{s}^{[\lambda]},\ \overline{A}^{[\lambda]}\subseteq\overline{H}(\lambda)\subseteq\overline{A}_{s}^{[\lambda]}$ 则

① $\underline{A}=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda^{c}\bullet\underline{H}(\lambda),\ \overline{A}=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda^{c}\bullet\overline{H}(\lambda)$ (2.15)

② 0<λ$_1$<λ$_2$≤1时,$\underline{H}(\lambda_1)\supseteq\underline{H}(\lambda_2),\ \overline{H}(\lambda_1)\supseteq\overline{H}(\lambda_2)$ (2.16)

③ $\underline{A}^{[\lambda]}=\bigcup_{\alpha>\lambda}\underline{H}(\alpha),\ \underline{A}_{s}^{[\lambda]}=\bigcap_{\alpha<\lambda}\underline{H}(\alpha),\ \overline{A}_{[\lambda]}=\bigcup_{\alpha>\lambda}\overline{H}(\alpha),\ \overline{A}_{[\lambda]}^{s}=\bigcap_{\alpha<\lambda}\overline{H}(\alpha)$ (2.17)

3 粗糙模糊集的表现定理

定义3.1 设R=($\underline{R}$,$\overline{R}$)为粗糙集族,映射$\underline{H}$:[0,1]→P($\underline{R}$)(其中P($\underline{R}$)表示$\underline{R}$的幂集),$\overline{H}:[0,1]\to P(\overline{R})$满足:$\forall\lambda,\mu\in[0,1]$,有$\underline{H}(\mu)\subseteq\underline{H}(\lambda)$,$\overline{H}(\mu)\subseteq\overline{H}(\lambda)$,则称$H=(\underline{H},\overline{H})$为R上的一个集合套,R上的集合套全体记为H(R)。

以下四个定理中仅证明定理3.3,其余定理的证明类似

设$R=\{(\underline{X},\overline{X})\mid(\underline{X},\overline{X})$为粗糙集$\}$,$\overline{R}=\{\overline{X},\mid(\underline{X},\overline{X})$为粗糙集$\}$,$\underline{R}=\{\underline{X},\mid(\underline{X},\overline{X})$为粗糙集$\}$,$A=(\underline{A},\overline{A})$ $A^{*}=\{B\in F(U))\mid\underline{B}=\underline{A},\overline{B}=\overline{A}\}$为RS集；$H^{*}$(R)={H|H∈H(R)},f: H^{*}(R)→A^{*},记$[\underline{H}]=\{\underline{H}\mid[\underline{H},\overline{H}]=[H]\},[\overline{H}]=\{\overline{H}\mid[\underline{H},\overline{H}]=[H]\}$,
$f([H])=f([\underline{H},\overline{H}])=(f([\underline{H}]),F([\overline{H}]),\forall H\in H^{*}(R)$

定理3.2 设$f([H])=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$,即$f([\underline{H}])=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda\underline{H}(\lambda)$,$f([\overline{H}])=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda\overline{H}(\lambda)$,则f是($H^{*}$(R),∪,∩,’)到($A^{*}$,∪,∩,’)的满同态映射,且f满足:

（1）$(f([\underline{H}]))_{\lambda}^{s}\subseteq\underline{H}(\lambda)\subseteq(f([\underline{H}]))_{\lambda},\ (f([\overline{H}]))_{\lambda}^{s}\subseteq\overline{H}(\lambda)\subseteq(f([\overline{H}]))_{\lambda}$ (3.1)

（2）$(f([\underline{H}]))_{\lambda}=\bigcap_{\alpha<\lambda}\underline{H}(\alpha),\ (f([\overline{H}]))_{\lambda}=\bigcap_{\alpha<\lambda}\overline{H}(\alpha)$ (3.2)

（3）$(f([\underline{H}]))_{\lambda}^{s}=\bigcup_{\alpha>\lambda}\underline{H}(\alpha),\ (f([\overline{H}]))_{\lambda}^{s}=\bigcup_{\alpha>\lambda}\overline{H}(\alpha)$ (3.3)

证明略。

定理3.3 设$f([H])=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet H(\lambda)$,即$f([\underline{H}])=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\underline{H}(\lambda)$,即$f([\overline{H}])=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\overline{H}(\lambda)$,则f是($H^{*}$(R),∪,∩,’)到($A^{*}$,∪,∩,’)的满同态映射,且f满足:

（1）$(f([\underline{H}]))_{s}^{\lambda}\supseteq\underline{H}(\lambda)\supseteq(f([\underline{H}]))^{\lambda},\ (f([\overline{H}]))_{s}^{\lambda}\supseteq\overline{H}(\lambda)\supseteq(f([\overline{H}]))^{\lambda}$ (3.4)

（2）$(f([\underline{H}]))^{\lambda}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\underline{H}(\alpha),\ (f([\overline{H}]))^{\lambda}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\overline{H}(\alpha)$ (3.5)

（3）$(f([\underline{H}]))_{S}^{\lambda}=\bigcap_{\alpha>\lambda}\underline{H}(\alpha),\ (f([\overline{H}]))_{S}^{\lambda}=\bigcap_{\alpha>\lambda}\overline{H}(\alpha)$ (3.6)

证明:首先证明f是满射,$\forall H\in H^{*}(R)$,$f([\underline{H}])=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\underline{H}(\lambda)$,即$f([\underline{H}])=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\underline{H}(\lambda)$,$f([\overline{H}])=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\overline{H}(\lambda)\in A^{*}$惟一确定,所以f是$H^{*}$(R)到$A^{*}$的映射。

另外,$\forall A\in A^{*}$,取$\forall\underline{H}(\lambda)=\underline{A}^{\lambda},\overline{H}(\lambda)=\overline{A}^{\lambda}$,则$\forall H\in H^{*}(R)$

$f([\underline{H}])=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\underline{H}(\lambda)=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\underline{A}(\lambda)=\underline{A}$　$f([\overline{H}])=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\overline{H}(\lambda)=\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\overline{H}(\lambda)=\overline{A}$,其次证明(3.4)、(3.5)、(3.6)式成立

若$x\in\underline{H}(\lambda)$,则$\underline{H}(\lambda)(x)=1$,

$f([\underline{H}])(x)=(\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\underline{H}(\lambda))(x)=\wedge_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\underline{H}(\lambda)\le\lambda\wedge1=\lambda$即$f([\underline{H}])(x)\le\lambda,x\in(f(\underline{H}))^{\lambda}$,即$\underline{H}(\lambda)\subseteq(f([\underline{H}]))_s^{\lambda}$,同理可证$\overline{H}(\lambda)\subseteq(f([\overline{H}]))_s^{\lambda}$

另一方面,设$x\notin\underline{H}(\lambda)$则$\underline{H}(\lambda)(x)=0$,且当α ≤ λ时,$\underline{H}(\alpha)(x)=0$,从而$f([\underline{H}])(x)=(\bigcap_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\underline{H}(\lambda))(x)=\wedge_{\lambda\in[0,1]}\lambda\bullet\underline{H}(\lambda)(x)$
$=(\wedge_{0\le\alpha\le\lambda}\alpha\bullet\underline{H}(\lambda))(x)\wedge(\wedge_{\lambda<\alpha\le1}\alpha\bullet\underline{H}(\lambda))(x)\ge\wedge_{0\le\alpha\le\lambda}\alpha=\lambda$即$f([\underline{H}])(x)\le\lambda,\ \underline{X}\notin(f(\underline{H}))_s^{\lambda}$

即$(f([\underline{H}]))^{\lambda}\subseteq\underline{H}(\lambda)$同理可证$(f([\overline{H}]))^{\lambda}\subseteq\overline{H}(\lambda)$即$(f([\underline{H}]))_s^{\lambda}\supseteq\underline{H}(\lambda)\supseteq(f([\underline{H}]))^{\lambda}$,$(f([\overline{H}]))_s^{\lambda}\supseteq\overline{H}(\lambda)\supseteq(f([\overline{H}]))^{\lambda}$即式(4.6)成立。

由分解定理3.2.3 $\underline{A}^{\lambda}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\underline{H}(\alpha)$,$\underline{A}_s^{\lambda}=\bigcap_{\alpha>\lambda}\underline{H}(\alpha)$,$\overline{A}^{\lambda}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\overline{H}(\alpha)$,$\overline{A}_s^{\lambda}=\bigcap_{\alpha>\lambda}\overline{H}(\alpha)$,故$(f([\underline{H}]))^{\lambda}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\underline{H}(X)$,$(f([\overline{H}]))^{\lambda}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\overline{H}(X)$和$(f([\underline{H}]))_s^{\lambda}=\bigcap_{\alpha>\lambda}\underline{H}(X)$,$(f([\overline{H}]))_s^{\lambda}=\bigcap_{\alpha>\lambda}\overline{H}(X)$成立。即式(3.4)、(3.5)、(3.6)成立。

最后证明f是同态映射,即证明f保并、保交、保补,$\forall\{\underline{H}_t\mid t\in T\}\subseteq$ H*(R)

$(f(\bigcup_{t\in T}\underline{H}_t))^{\lambda}=\bigcup_{\alpha<\lambda}(\bigcup_{t\in T}\underline{H}_t)(\alpha)=\bigcup_{\alpha<\lambda}(\bigcup_{t\in T}\underline{H}_t(\alpha))=\bigcup_{t\in T}(\bigcup_{\alpha<\lambda}\underline{H}_t(\alpha))=\bigcup_{t\in T}(f(\underline{H}_t))^{\lambda}=(\bigcup_{t\in T}f(\underline{H}_t))^{\lambda}$即$(f(\bigcup_{t\in T}\underline{H}_t))^{\lambda}=(\bigcup_{t\in T}f(\underline{H}_t))^{\lambda}$同理可证$(f(\bigcup_{t\in T}\overline{H}_t))^{\lambda}=(\bigcup_{t\in T}f(\overline{H}_t))^{\lambda}$　$(f(\bigcap_{t\in T}\underline{H}_t))_s^{\lambda}=\bigcap_{\alpha>\lambda}(\bigcap_{t\in T}\underline{H}_t)(\alpha)=\bigcap_{\alpha>\lambda}(\bigcap_{t\in T}\underline{H}_t(\alpha))=\bigcap_{t\in T}(\bigcap_{\alpha>\lambda}\underline{H}_t(\alpha))=\bigcap_{t\in T}(f(\underline{H}_t))_s^{\lambda}=(\bigcap_{t\in T}(f(\underline{H}_t))_s^{\lambda}$即$(f(\bigcap_{t\in T}\underline{H}_t))^{\lambda}=(\bigcap_{t\in T}(f(\underline{H}_t))_s^{\lambda}$,同理可证$(f(\bigcap_{t\in T}\overline{H}_t))_s^{\lambda}=(\bigcap_{t\in T}f(\overline{H}_t))_s^{\lambda}$　$(f(\underline{H}'))_s^{\lambda}=\bigcap_{\alpha>\lambda}\underline{H}'(\alpha)=\bigcap_{\alpha>\lambda}(\underline{H}(1-\alpha))'=\bigcap_{1-\lambda>1-\alpha}(\underline{H}(1-\alpha))'=\bigcap_{\beta<1-\lambda}(\underline{H}(\beta))'=(f(\underline{H})_s^{1-\lambda})'$
$=((f(\underline{H}))')_s^{1-\lambda}$即$f(\underline{H}')=f(\underline{H})'$,同理可证$f(\overline{H}')=f(\overline{H})'$,所以f是(H*(R),∪,∩,')到(A*,∪,∩,')的满同态映射。

定理3.4 设$f([H])=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda^c H(\lambda)$,即$f([\underline{H}])=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda^c\underline{H}(\lambda)$,$f([\overline{H}])=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda^c\overline{H}(\lambda)$,则f是(H*(R),∪,∩,')到(A*,∪,∩,')的满同态映射,且f满足:

(1)$(f([\underline{H}]))_{[\lambda]}^s\subseteq\underline{H}(\lambda)\subseteq(f([\underline{H}]))_{[\lambda]}$,$(f([\overline{H}]))_{[\lambda]}^s\subseteq\overline{H}(\lambda)\subseteq(f([\overline{H}]))_{[\lambda]}$　(3.7)

(2)$(f([\underline{H}]))_{[\lambda]}=\bigcap_{\alpha<\lambda}\underline{H}(\alpha)$,$(f([\overline{H}]))_{[\lambda]}=\bigcap_{\alpha<\lambda}\overline{H}(\alpha)$　(3.8)

(3)$(f([\underline{H}]))_{[\lambda]}^s=\bigcup_{\alpha>\lambda}\underline{H}(\alpha)$,$(f([\overline{H}]))_{[\lambda]}^s=\bigcup_{\alpha>\lambda}\overline{H}(\alpha)$　(3.9)

证明略

定理3.5 设$f([H])=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda^c H(\lambda)$,即$f([\underline{H}])=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda^c\underline{H}(\lambda)$,$f([\overline{H}])=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda^c\overline{H}(\lambda)$,则f是(H*(R),∪,∩,')到(A*,∪,∩,')的满同态映射,且f满足:

(1)$(f([\underline{H}]))_s^{[\lambda]}\supseteq\underline{H}(\lambda)\supseteq(f([\underline{H}]))^{[\lambda]}$,$(f([\overline{H}]))_s^{[\lambda]}\supseteq\overline{H}(\lambda)\supseteq(f([\overline{H}]))^{[\lambda]}$　(3.10)

(2)$(f([\underline{H}]))^{[\lambda]}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\underline{H}(\alpha)$,$(f([\overline{H}]))^{[\lambda]}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\overline{H}(\alpha)$　(3.11)

(3)$(f([\underline{H}]))_S^{[\lambda]}=\bigcap_{\alpha>\lambda}\underline{H}(\alpha)$,$(f([\overline{H}]))_S^{[\lambda]}=\bigcap_{\alpha>\lambda}\overline{H}(\alpha)$　(3.12)

证明略。

4 粗糙模糊集的扩张原理

定义4.1 设R_1、R_2分别是近似空间(X,R_1)和(Y,R_2)上的粗糙集,映射f:X→Y诱导的映射$f_R:R_1\to R_2$,$(\underline{X},\overline{X})\to f_R(\underline{X},\overline{X})=(\underline{Y},\overline{Y})$称为f诱导的从论域X到论域Y的粗糙变换。

其中 $f_R(X,\overline{X})\triangleq(\{y\mid f(x)=y,x\in X\},\{y\mid f(x)=y,x\in\overline{X}\})$　(4.1)

定义4.2 设A_1^*,A_2^*分别是近似空间(X,R_1)和(Y,R_2)上的粗糙模糊集,映射f:X→Y诱导的映射$f_{RF}:A_1^*\to A_2^*$,$(A,\overline{A})\to f_{RF}(A,\overline{A})=(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f_{RF}(A_\lambda),\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f_{RF}(\overline{A}_\lambda))=(B^*,\overline{B}^*)$　(4.2)

叫做f诱导的从论域X到论域Y的粗糙模糊变换。其隶属函数表示为:

$f_{RF}(A,\overline{A})(y)=(\vee\{A(x)\mid f(x)=y,x\in X\},\vee\{\overline{A}(x)\mid f(x)=y,x\in\overline{X}\})$

定理4.10(扩张原理1)设f:X→Y,若$(\underline{A},\overline{A})\in A^*$,则$\forall y\in Y$

$f(\underline{A},\overline{A})(y)=\vee_{f(x)=y}(\underline{A}(x),\overline{A}(x))$　(4.3)

特别地,若$\{x\in X\mid f(x)=y\}=\phi$,规定f(A)(y)=0

证明:$f_{RF}(\underline{A},\overline{A})(y)=(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f_{RF}(\underline{A}_\lambda),\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f_{RF}(\overline{A}_\lambda))(y)$

$=\vee_{\lambda\in[0,1]}(\{\lambda\mid y\in f_{RF}(\underline{A}_\lambda)\},\{\lambda\mid Y\in f_{RF}(\overline{A}_\lambda)\})$

$=\vee_{\lambda\in[0,1]}(\{\lambda\mid\exists x\in\underline{A}_\lambda,f(x)=y\},\{\lambda\mid\exists x\in\overline{A}_\lambda,f(x)=y\})$

$=\vee_{\lambda\in[0,1]}\vee_{f(x)=y}(\{\lambda\mid\exists x\in\underline{A}_\lambda\},\{\lambda\mid\exists x\in\overline{A}_\lambda\})$

$=\vee_{f(x)=y}\vee_{\lambda\in[0,1]}(\{\lambda\mid\exists x\in\underline{A}_\lambda\},\{\lambda\mid\exists x\in\overline{A}_\lambda\})$

$=\vee_{f(x)=y}(\vee_{\lambda\in[0,1]}(\{\lambda\underline{A}_\lambda(x)\},\{\lambda\overline{A}_\lambda(x)\})$

$=\vee_{f(x)=y}(\underline{A}(x),\overline{A}(x))$

定理4.3(扩张定理2)设f:X→Y,若$(\underline{A},\overline{A})\in$ A⁺,则$\forall y\in Y$

(1)$f(\underline{A},\overline{A})(y)=(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(\underline{A}_\lambda^s),\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(\overline{A}_\lambda^s))$　(4.4)

(2)若 $\underline{H}_A(\lambda)$、$\overline{H}_A(\lambda)$ 满足：$\underline{A}_\lambda^s \subseteq \underline{H}_A(\lambda) \subseteq \underline{A}_\lambda, \overline{A}_\lambda^s \subseteq \overline{H}_A(\lambda) \subseteq \overline{A}_\lambda$ 则

$$f(\underline{A},\overline{A})(y) = (\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f(\underline{H}_A(\lambda)), \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f(\overline{H}_A(\lambda))) \tag{4.5}$$

证明：(1)由分解定理3.4有 $\underline{A} = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda \underline{A}_\lambda^s = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda \underline{A}_\lambda$, $\overline{A} = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda \overline{A}_\lambda^s = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda \overline{A}_\lambda$,

又由定义4.9有 $f_{RF}(\underline{A},\overline{A}) = (\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f_{RF}(\underline{A}_\lambda), \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f_{RF}(\overline{A}_\lambda))$。所以有 $f_{RF}(\underline{A},\overline{A})(y) = (\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f_{RF}(\underline{A}_\lambda^s), \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f_{RF}(\overline{A}_\lambda^s)(y)$ 下来只需用完全类似于定理4.10的方法,只需证明

$f_{RF}(\underline{A},\overline{A})(y) = (\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f_{RF}(\underline{A}_\lambda^s), \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f_{RF}(\overline{A}_\lambda^s)(y) = \bigvee_{f(x)=y} (\underline{A}(x), \overline{A}(x))$ 即可。

(2)显然。

定理4.4 (扩张定理2')设f:X→Y,若($\underline{A}$, $\overline{A}$) ∈ A*,则 $\forall y \in Y$

(1) $$f(\underline{A},\overline{A})(y) = (\bigcap_{\lambda\in[0,1]} \lambda \bullet f(\underline{A}^\lambda), \bigcap_{\lambda\in[0,1]} \lambda \bullet f(\overline{A}^\lambda)) \tag{4.6}$$

(2) 若 $\underline{H}_A(\lambda)$、$\overline{H}_A(\lambda)$ 满足：$\underline{A}_s^\lambda \supseteq \underline{H}_A(\lambda) \supseteq \underline{A}^\lambda, \overline{A}_s^\lambda \subseteq \overline{H}_A(\lambda) \subseteq \overline{A}^\lambda$ 则

$$f(\underline{A},\overline{A})(y) = (\bigcap_{\lambda\in[0,1]} \lambda \bullet f(\underline{H}_A(\lambda)), \bigcap_{\lambda\in[0,1]} \lambda \bullet f(\overline{H}_A(\lambda))) \tag{4.7}$$

证明：由定义3.3、分解定理3.5有 $\underline{A} = \bigcap_{\lambda\in[0,1]} \lambda \bullet \underline{A}^\lambda = \bigcap_{\lambda\in[0,1]} \lambda \bullet \underline{A}_s^\lambda$, $\overline{A} = \bigcap_{\lambda\in[0,1]} \lambda \bullet \overline{A}^\lambda = \bigcap_{\lambda\in[0,1]} \lambda \bullet \overline{A}_s^\lambda$,以下的证明完全类似于定理4.10

定理4.5 (扩张定理2'') 设f:X→Y,若($\underline{A}$, $\overline{A}$) ∈ A⁺,则 $\forall y \in Y$

(1) $$f(\underline{A},\overline{A})(y) = (\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda^c f(\underline{A}_{[\lambda]}^S), \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda^c f(\overline{A}_{[\lambda]}^S)) \tag{4.8}$$

(2)若 $\underline{H}_A(\lambda)$、$\overline{H}_A(\lambda)$ 满足：$\underline{A}_{[\lambda]}^s \subseteq \underline{H}_A(\lambda) \subseteq \underline{A}_{[\lambda]}, \overline{A}_{[\lambda]}^s \subseteq \overline{H}_A(\lambda) \subseteq \overline{A}_{[\lambda]}$ 则

$$f(\underline{A},\overline{A})(y) = (\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda^c f(\underline{H}_A(\lambda)), \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda^c f(\overline{H}_A(\lambda))) \tag{4.9}$$

定理4.6 (扩张定理2''')设f:X→Y,若($\underline{A}$, $\overline{A}$) ∈ A⁺,则 $\forall y \in Y$

(1) $$f(\underline{A},\overline{A})(y) = (\bigcap_{\lambda\in[0,1]} \lambda^c \bullet f(\underline{A}^{[\lambda]}), \bigcap_{\lambda\in[0,1]} \lambda^c \bullet f(\overline{A}^{[\lambda]})) \tag{4.10}$$

(2)若 $\underline{H}_A(\lambda)$、$\overline{H}_A(\lambda)$ 满足：$\underline{A}_s^{[\lambda]} \supseteq \underline{H}_A(\lambda) \supseteq \underline{A}^{[\lambda]}, \overline{A}_s^{[\lambda]} \subseteq \overline{H}_A(\lambda) \subseteq \overline{A}^{[\lambda]}$ 则

$$f(\underline{A},\overline{A})(y) = (\bigcap_{\lambda\in[0,1]} \lambda^c \bullet f(\underline{H}_A(\lambda)), \bigcap_{\lambda\in[0,1]} \lambda^c \bullet f(\overline{H}_A(\lambda))) \tag{4.11}$$

注释及参考文献：

[1]Pawlak Z. Rough sets[J]. International of Computer and Information Science,1982,11:341−356.

[2]Pawlak Z. Rough sets and Fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,1992,45:157−160.

[3]Dubois D, Prade H. Rough Fuzzy sets and Fuzzy Rough sets[J].International of General Systems,1990,17:191−209.

[4]张文修,吴伟志,等. 粗糙集理论与方法[M].北京:科学出版社, 2001.

[5]张文修,王国俊,等.模糊数学引论[M].西安:西安交通大学出版社,1991.

[6]袁学海,李洪兴,罗承忠.几种新的截集及其应用[J].模糊系统与数学,1997,11(1):37−43.

[7]蒋劲松,王洪凯.粗糙模糊集的分解[J].模糊系统与数学,2004,12(4):54−57.

The Constructive Properties of Rough Fuzzy Sets Based on All Kinds of Level Sets

HE Tian−rong

(*School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Nationalities University, Kunming, Yunnan 650031*)

Abstract: In this paper, we introduced λ − upper Level set, strong λ − upper Level set, λ − lower Level set, strong λ − lower Level set, λ − upper weight Level set, strong λ − upper weight Level set, λ − lower weight Level set and strong λ − lower weight Level set in Pawlak approximation space. And discussed the constructive properties of rough fuzzy sets based on some kinds of level sets systematically. We devoted many efforts to study the represent theories and extended theories of rough fuzzy sets, and finally we gained the represent and extended theories based on four different level sets and detailed poof of the theories was given.

Key words: Rough fuzzy sets; λ − level sets