

两带电导体球外的电势分布和相互作用力问题

郑焕武

(西昌学院 数理系, 四川 西昌 615022)

【摘要】本文从一般电像法入手, 讨论并给出了两任意带电导体球附近的电势分布和相互作用力公式。

【关键词】带电导体球; 相互作用力; 电像法

【中图分类号】O442 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2008)04-0029-04

两个带电导体球周围的电场分布和相互作用力问题, 是至今仍未完全解决的问题。本文将对两个电势不等的任意带电导体球周围的电势分布和相互作用力问题作出讨论, 并给出计算公式。

一 带电导体球与接地导体球附近的电势

(一) 像电荷确定

在《电动力学》教材^[1]中已用电像法解决了带电导体球与点电荷的电场分布问题。并给出离半径为 R_0 的接地导体球心为 a ($a > R_0$) 处有点电荷 Q 时, 球外的电势由点电荷 Q 及其在球内的像电荷 Q' 共同激发, 其中像电荷 Q' 的大小和到球心的距离为

$$Q' = -\frac{R_0}{a}Q \text{ 和 } b = \frac{R_0^2}{a} \quad (1)$$

仿照带电导体球外有点电荷时的讨论方法, 下面对两带电导体球外电场的分布作出讨论, 先讨论接地导体球附近有另一带电导体球的情形。

设有接地导体球 A 的半径为 R_1 , 带电导体球 B 的半径为 R_2 , 两球心距离为 a ($R_1 + R_2 < a < \infty$), B 球带正电荷 Q , 如图 1 所示。由于 B 球面电势高于 A 球面电势, 在 A 球面上有感应负电荷。另一方面, B 球面上的正电荷也要受到 A 球面上感生负电荷场强的影响而分布不均匀, 并靠近 A 球一边密度大, 远离 A 球一边密度小。因此, B 球面上的电荷 Q 在球外的电场不再等同于 Q 集中于球心处在球外的电场, 而是沿两球连心线向 A 球一边偏移。即 B 球面上不均匀分布电荷在球外的电场等同于 B 球面内偏离球心一点处的点电荷 Q 在球外的电场(此时的点电荷电场不考虑导体边界的影响)。设该点为 N , 它离 B 球心距离为 b_2 , 即 N 点到 A 球心的距离为 $a - b_2$, 这样一来, B 球面上的电荷对 A 球面的影响, 可用 N 点处的点电荷 Q 在不考虑 B 球面存在情况下对 A 球面的影响代替。即把接地导体球附近有另一带电导体球的问题, 简化成接地导体球附近在离球心 $a - b_2$ 处有点电荷 Q 的问题, 亦即 B 球面上 Q 在 A 球面上感生负电荷的大小与分布情况, 等同于 N 点处点电荷 Q 在 A 球面上感生负电荷的大小与分布情况。由电像法知, N 点处点电荷 Q 在 A 球面上感生负电荷在球外的电场可用 Q 的像电荷 Q' 在球外的电场代替, 设像电荷 Q' 在 A 球内的位置为 M 点, 该点离球心距离为 b_1 , 因此, 只要找出点电荷 Q 所在点 N 的位置和像电荷 Q' 的位置和大小, 球外任一点的电场就等于 N 点处的 Q 和 M 点处的 Q' 的电场之和。但由于 Q 的位置 N 点到球心距离 b_2 未知, 不能直接从(1)式求出 b_1 和 Q' 。为此, 我们利用点电荷与接地导体球成像的性质, 即点电荷 Q 和像电荷 Q' 对接地导体球面相互共轭, 二者在球面上的电势和为零的性质, 有 A 球面上 P_1 点和 P_2 点的电势为零。

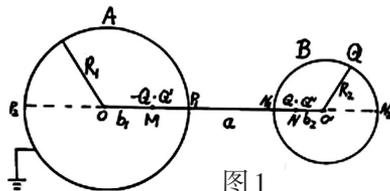


图 1

另一方面, A 球面上感生负电荷对 B 球面上电荷分布的影响, 就相当于在 A 球面内靠近 B 球的一边存在一负电荷对 B 球面的影响一样。因此, 假设在 A 球面内的两球连心线上有一负电荷, 由于该电荷的电场线只有一部分来自 B 球面, 其余来自无穷远。因此, 该负电荷的值一定大于像电荷 Q' , 设它为 $-Q$, 并位于 M 点上。 $-Q$ 同样在 B 球面内 N 点处有像电荷 Q'' , 并 $-Q$ 和 Q'' 对 B 球面相互共轭, 二者在 B 球面上的电势和为零,

即B球面上的N₁点和N₂点的电势为零,由A球面上的P₁点和P₂点以及B球面上的N₁点和N₂点的电势列出四个方程如下:

$$\begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{a-b_2-R_1} + \frac{Q'}{R_1-b_1} \right) = 0 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{a-b_2+R_1} + \frac{Q'}{R_1+b_1} \right) = 0 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-Q}{a-b_1-R_2} + \frac{Q''}{R_2-b_2} \right) = 0 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-Q}{a-b_1+R_2} + \frac{Q''}{R_2+b_2} \right) = 0 \end{cases}$$

解此方程组,容易得出M点上的像电荷Q'到A球心距离b₁和N点处的点电荷Q到B球心距离b₂(它也是像电荷Q''到球心的距离)分别为

$$b_1 = \frac{a^2 + R_1^2 - R_2^2}{2a} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a^2 + R_1^2 - R_2^2}{a}\right)^2 - 4R_1^2} \quad (2)$$

$$b_2 = \frac{a^2 + R_2^2 - R_1^2}{2a} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a^2 + R_1^2 - R_2^2}{a}\right)^2 - 4R_1^2} \quad (3)$$

像电荷Q'和Q''的大小为

$$Q' = -\frac{R_1 - b_1}{a - b_2 - R_1} Q = -\frac{R_2^2 - (a - R_1)^2 + \sqrt{[(a + R_1)^2 - R_2^2][(a - R_1)^2 - R_2^2]}}{(a - R_1)^2 - R_2^2 + \sqrt{[(a + R_1)^2 - R_2^2][(a - R_1)^2 - R_2^2]}} Q \quad (4)$$

和

$$Q'' = \frac{R_2 - b_2}{a - b_1 - R_2} Q = \frac{R_1^2 - (a - R_2)^2 + \sqrt{[(a + R_1)^2 - R_2^2][(a - R_1)^2 - R_2^2]}}{(a - R_2)^2 - R_1^2 + \sqrt{[(a + R_1)^2 - R_2^2][(a - R_1)^2 - R_2^2]}} Q \quad (5)$$

由(2)式到(5)式看出,b₁,b₂和Q'、Q''均与半径R₁、R₂和球心距离a有关,只要其中任何一个变化,b₁,b₂和Q'、Q''都要随之变化,特别是当R₁和a一定时,b₁和b₂随R₂减小而减小,当R₂=0,即B球面上的面电荷Q换成B球心处的点电荷Q时,由(2)式和(3)式求得b₁= $\frac{R_1^2}{a}$,b₂=0,此时像电荷Q'= $-\frac{R_1}{a}Q$,Q''=0,所得结果正好是(1)式给出的结果,即(1)式是(2)和(4)式的特殊情形。当R₁=R₂=R₀时,有

$$b_1 = b_2 = b = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4R_0^2}}{2} \quad (6)$$

和

$$Q' = -Q'' = -\frac{R_0 - b}{a - b - R_0} Q = -\frac{2R_0 - a + \sqrt{a^2 - 4R_0^2}}{a - 2R_0 + \sqrt{a^2 - 4R_0^2}} Q \quad (7)$$

此时,M点处-Q对B球面的影响与A球面上感生负电荷对B球面的影响相同。

(二) 球外电势分布

球外任意点P的电势等于B球面上非均匀分布的电荷Q和A球面上感生负电荷Q'的电势和,即为N点处的点电荷Q和M点处的像电荷Q'的电势和,选取A球心为坐标原点,则球外任意点P的电势为

$$\begin{aligned} \varphi_p &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (a - b_2)^2 - 2R(a - b_2)\cos\theta}} - \frac{R_1 - b_1}{(a - b_2 - R_1)\sqrt{R^2 + b_1^2 - 2Rb_1\cos\theta}} \right) \quad (8) \end{aligned}$$

(8)式中b₁,b₂和Q'分别由(2)式,(3)式和(4)式给出,R为坐标原点到观察点P的距离,θ为R与极轴的夹角,如图2所示,在两球半径和球心距离以及电荷Q给定的情况下,b₁,b₂和Q'均是已知数,故电势只是R和θ的函数。

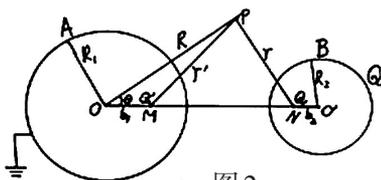


图2

如果A球不接地,球面上除感生负电荷外还有感生正电荷。而感生负电荷和B球面上的正电荷Q在球

外电势已由(8)式给出,且 $R=R_1$ 时(8)式为零(可以证明也可代入数字检验),A球面为等势面,感生正电荷均匀分布在球面上,故有中性导体球与带电导体球外的电势为

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'} + \frac{-Q'}{R} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + (a-b_2)^2 - 2R(a-b_2)\cos\theta}} - \frac{R_1-b_1}{(a-b_2-R_1)\sqrt{R^2 + b_1^2 - 2Rb_1\cos\theta}} + \frac{R_1-b_1}{R(a-b_2-R_1)} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

(9)式中前两项和(8)式同,第三项为感生正电荷在球外的电势。在A球面上,前两项之和为零,而第三项 $-Q' = \frac{R_1-b_1}{a-b_2-R_1}Q$ 中,因 R_1 、 R_2 和 Q 给定而为常数,故第三项在球面上为常数,即A球面为等势面,且电位比静电感应前升高了。

二 两个带电导体球外的电势

任何两个相邻的带电导体,只要它们的电位不相等,就有静电感应。如果两导体均带正电荷或一正一负,则总是由高电位导体上的电荷在低电位导体上感应出负电荷,使其电位升高。如果两导体均带负电荷,则总是由低电位导体上的负电荷在高电位导体上感应出正电荷,使其电位降低,我们称这种规律为静电感应条件。静电感应条件可由电力线总是由高电位指向低电位,并终止于负电荷或无穷远的性质作出解释。下面分几种类型讨论两带电导体球外的电势分布情况。

(一) 带异号电荷的情形

设图1中B球仍带正电荷 Q ,而A球不接地,使其带负电荷 Q_0 ,则因B球面电位高于A球面电位,在A球面上近B球一边有感应负电荷 Q' ,另一边有感应正电荷 $-Q'$ 。球外电势为B球面上的正电荷和A球面上的感应正负电荷以及A球面上原有的负电荷共同激发,而前三种电荷的电势已由(9)式给出,故只需在第(9)式里加上A球所带负电荷 Q_0 的电势即可,又因为(9)式的形式能使A球面为等势面,故A球面上 $-Q_0$ 在球外的电势就可用球心处 $-Q_0$ 在球外的电势代替。因此两带异号电荷导体球外电势为

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + (a-b_2)^2 - 2R(a-b_2)\cos\theta}} - \frac{R_1-b_1}{(a-b_2-R_1)\sqrt{R^2 + b_1^2 - 2Rb_1\cos\theta}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_1-b_1}{R(a-b_2-R_1)} \right] - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (10) \end{aligned}$$

(二) 带同号正电荷的情形

当两相邻导体球上带有同号正电荷,且电位不相等时,一般有如下几种情况;一是两球半径相等,而所带电量不等;二是所带电量相等,而半径不等,三是所带电量和两球半径都不相等。由于讨论方法相似,我们只讨论第一种情形。

设图1中A、B两球的半径相等,均为 R_0 ,并A球不接地,而是带正电荷 Q_0 ,B球仍带正电荷 Q ,且 $Q > Q_0$ 。则根据前面给出的静电感应条件,A球面上近B球一边有感应负电荷 Q' ,另一边有感应正电荷 $-Q'$,当感应负电荷和B球面上的电荷在球外电势表示成(8)式的形式后,A球面为零位面。则A球面原有电荷 Q_0 和感应正电荷视作均匀分布于球面上,故有球外电势为

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_3} \left(\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'} + \frac{Q_0 - Q'}{R} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + (a-b)^2 - 2R(a-b)\cos\theta}} - \frac{R_0-b}{(a-b-R_0)\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_0-b}{R(a-b-R_0)} \right] + \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (11) \end{aligned}$$

式中 b 和 Q' 由(6)式和(7)式算出。一个有趣的问题是,在半径相等的带电导体球电场中也同样存在三个“0.618”的问题,即当两球心距离 $a=2.236R$ 时,由(6)式和(7)式算出像电荷到球心距离及其大小为 $b=0.618R$ 和 $Q'=0.618Q$,进而求得B球面内N点到A球面的距离也是0.618R。这和《一个静电场题目中的三个“0.618”》一文^[2]的结果完全一致。

(三) 带同号负电荷的情形

如果两导体球均带负电荷,则它们的电位都低于零电位而为负值,但两导体球的电位仍有高低之分,仍以图 1 中 A、B 两球为例,只是这里不再让 A 球接地,而是使它带上电量为 Q_0 的负电荷,同时也将 B 球上的正电荷换成负电荷,量值仍为 Q ,且 $\frac{-Q}{R_2} < \frac{-Q_0}{R_1}$ 。即 B 球面的电位低于 A 球面的电位,根据静电感应条件,B 球面上的负电荷在 A 球面上近 B 球一边感应出正电荷,另一边多余出负电荷,即感生负电荷,与前面的讨论相同,感应正电荷在球外的电势仍由 M 点的像电荷 $-Q'$ 在球外的电势代替, $-Q'$ 仍由 (4) 式给出。这样一来,N 点处的 $-Q$ 和 M 点处的 $-Q'$ 仍然对 A 球面互相共轭,在 A 球面上的电势相互抵消,故 A 球所带负电荷 Q_0 及感生负电荷 Q 将均匀分布在球面上,从而得出两个带负电荷的相邻导体球的球外电势为

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-Q}{r} - \frac{Q'}{r'} + \frac{-Q_0 + Q'}{R} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{R^2 + (a-b_2)^2 - 2R(a-b_2)\cos\theta}} + \frac{R_1 - b_1}{(a-b_2 - R_1)\sqrt{R^2 + b_1^2 - 2Rb_1\cos\theta}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_1 - b_1}{R(a-b_2 - R_1)} \right] - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned} \tag{12}$$

式中第一项为 B 球面上 $-Q$ 的电势,第二项为 M 点上像电荷的电势,第三项和第四项为 A 球面上原带负电荷和感生负电荷的电势。由于前两项在 A 球面上之和为零,故 A 球面电势为负值,并且比静电感应前的电势低。

三 两带电导体球之间的相互作用力

在前面给出的所有电势计算式中,只有 R 和 θ 是变量,而其它的物理量均随两球半径和球心距离以及球面电荷的确定而确定,皆为已知数,因此,若要求球外场强,只要对场强与电势的关系式 $\vec{E} = -\nabla\phi$ 在球坐标下对 R 和 θ 求导数即可。下面进一步讨论两带电导体球之间相互作用力问题。

在以上的讨论中,我们已经把球面上所带各种电荷在球外的电场用两球连心线上三个点电荷在球外的电场代替,因此,两球的相互作用力就是两球连心线上三个点电荷之间的作用力,故只须用库仑定律就能求出,如图 2 中,使 A 球带电荷 Q_0 ,球心处有 $Q_0 - Q'$,则 B 球对 A 球的作用力,就是 N 点处的正电荷 Q 对 M 点处的像电荷 Q' 以及 A 球心处的电荷 $Q_0 - Q'$ 的作用力,故由库仑定律,并注意到 $Q' = -\frac{R_1 - b_1}{a - b_2 - R_1} Q$ 推得两任意带电导体球之间的相互作用力公式为

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{QQ'}{(a-b_1-b_2)^2} + \frac{Q(Q_0 - Q')}{(a-b_2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{(R_1 - b_1)Q^2}{(a-b_2 - R_1)(a-b_1-b_2)^2} + \frac{(R_1 - b_1)Q^2}{(a-b_2 - R_1)(a-b_2)^2} + \frac{QQ_0}{(a-b_2)^2} \right] \end{aligned} \tag{13}$$

只要 R_1, R_2 和 a 已知, b_1 和 b_2 就可由 (2) 式和 (3) 式求出,进而算出 F 。

由 (13) 式看出,两带电导体球之间的作用力既有引力又有斥力,如果 A 球接地,则 (13) 式中只有第一项,两球之间的作用力恒为引力,如果 A 球为不接地的中性球,则 (13) 式中只有第一项和第二项,且第一项大于第二项,两球之间的力也总是引力,但比 A 球接地时的力小;如果 A 球所带电荷 Q_0 为负电荷, (13) 式中第三项为负值,两球之间的力仍然是引力;如果 A 球所带电荷 Q_0 为正电荷,则两球之间的作用力可能是斥力也可能是引力,这要由 a, R_1, R_2 和 Q_0 决定。如果两导体球都是带负电荷,则 $-Q$ 的像电荷 $-Q'$ 为正电荷,两球之间的作用力公式仍然是 (13) 式的形式。特别是当两球半径 $R_1 = R_2 = 0$ 时,由 (2) 式和 (3) 式求出 $b_1 = b_2 = 0$, 此时的 (13) 式就简化成两个相互距离为 a 的点电荷的作用力 $F = \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0 a^2}$

注释及参考文献:

[1] 郭硕鸿. 电动力学 (第二版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 1997, 7.
 [2] 陆正亚. 一个静电题目中的三个“0.618” [J]. 大学物理, 1983(7): 26-30.

Application of DCS in the Fume Desulphurization Automation Project

BAI Ke-qiang^{1,2}, LIU Zhi-gui¹, CHEN Si-hai³, WANG Xiao-hong³

(1.Southwest University Science and Technology, Mianyang, Sichuan 621010;

2.Chengdu Engineering Co., Ltd of China Light Industry, Chengdu, Sichuan 610015;

3.Mianyang Vocational and Technical College, Mianyang, Sichuan 621000)

Abstract: The article introduces the application of Keyuan NT6000 DCS in the fume desulphurization project; and mainly introduces the choices of desulphurization technology and focuses on the description of the principle of fume desulphurization technology in dalate electric power plant and the application of NT6000 system in the desulphurization synthesized automation system. The system has run steady since it has been put into operation; it not only creates the significant economic benefit but also protects environment and persistent development.

Key words: Keyuan NT6000 system; Electric power plant; Fume desulphurization technology; Synthesized automation

(上接32页)

On the Electromotive Force Distribution and Interaction Outside Two Electrified Conductor Balls

ZHENG Huan-wu

(Department of Physics, Xichang College, Xichang, Sichuan 615022)

Abstract: The paper discusses and gives the formula of the electromotive force distribution and interaction nearby any two electrified conductor balls from the general rule of electricity image.

Key words: Electrified conductor ball; Interaction; Electricity image