辅助函数在证明题目中的作用

胡承钧
（沙市大学 基础课部，湖北 荆州 434000）

【摘　要】本文分析了利用辅助函数证明微分中值类公式的基本方法。

【关键词】证明；辅助函数
【中图分类号】O174 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2008)04-0026-03

在证明数学问题时，我们发现有些问题用辅助函数证明，使问题变得较为容易。下面就微分中值类问题来分析辅助函数在证明题目中的作用：

1 设f(x)在$[0,\frac{\pi}{2}]$上可导且$f(0)=f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$，求证：存在$\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$使$f'(x)+f(x)=\cos x$.

分析　解$f'(x)+f(\xi)=\cos\xi$得$f(\xi)=e^{-\xi}[\frac{1}{2}e^{\xi}(\cos\xi+\sin\xi)+c]$解出$c=e^{\xi}[f(\xi)-\frac{1}{2}(\cos\xi+\sin\xi)]$.

$\therefore H(x)=e^{x}[f(x)-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)]$.

证明　令$H(x)=e^{x}[f(x)-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x]$，则H(x)在$[0,\frac{\pi}{2}]$可导且$H(0)=H(\frac{\pi}{2})=0$，∴存在$\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$使$H'=(\xi)=e^{\xi}[f'(x)+f(\xi)-\cos\xi]=0$. ∵$e^{\xi}\neq0$，∴$f'(x)+f(\xi)=\cos\xi$.

2 设f(x)，g(x)在[a,b]上可导且f(a)=f(b)=0，求证：存在$\xi\in(a,b)$使$f'(x)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

分析　设$f(\xi)=y$，$g(\xi)=u$.则$f'(x)+f(\xi)g'(\xi)=0\Leftrightarrow dy+ydu=0$.解此方程得$c=ye^{u}=f(x)e^{g(x)}$.

证明　令$H(x)=f(x)e^{g(x)}$则H(x)在[a,b]可导且H(a)=H(b)=0

∴存在$\xi\in(a,b)$使$H'(x)=[f'(x)+f(x)g'(x)]e^{g(x)}=0$

$\because e^{g(x)}\neq0$　$f'(x)+f(x)g'(x)=0$

3 设f(x)在[a,b]上二次可导.求证：存在$\xi\in(a,b)$使$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(x)$.

分析　将求证变形为：$f''(x)-\alpha=0$.其中$\alpha=4(b-a)^{-2}[f(b)-2f(m)+f(a)]$，$m=\frac{a+b}{2}$.　解$f''(x)-\alpha=0$，得$c=f(x)-\frac{a}{2}x^2+c_1x$，∴令$H(x)=f(x)-\frac{a}{2}x^2+c_1x$.

如令H(a)=H(m)，则$c_1=\frac{a}{2}(m+a)-\frac{f(m)-f(a)}{m-a}$　　　（1）

如令H(b)=H(m)，则$c_1=\frac{a}{2}(m+b)-\frac{f(m)-f(b)}{m-b}$　　　（2）

可以验证(1)，(2)两式的右端是相同的.

证明　令$H(x)=f(x)-\frac{a}{2}x^2+c_1x$，其中$\alpha=4(b-a)^{-2}[f(b)-2f(m)+f(a)]$，$m\frac{a+b}{2}$，$c_1=(m-a)^{-1}[f(a)-f(m)]+\frac{a}{2}(a+m)$

可以验证H(a)=H(m)=H(b).

又∵H(x)在[a,m]，[m,b]上可导.

∴存在ξ_1,ξ_2满足：$a<\xi_1<m<\xi_2<b$，使$H'(\xi_1)=H'(\xi_2)=0$.

∵H'(x)在$[\xi_1,\xi_2]$上可导.

∴存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使$H''(x)=f''(x)-a=0$即为所证.

4 设f(x)在[a,b]上导数连续且存在$c\in(a,b)$使$f'(c)=0$.求证：存在$\xi\in(a,b)$使$f'(x)=\frac{f(x)-f(a)}{b-a}$.

分析　解$f'(x)=\frac{f(x)-f(a)}{b-a}$，得$c=[f(x)-f(a)]e^{-x/(b-a)}$

证明　令$H(x)=[f(x)-f(a)]e^{-x/(b-a)}$，下面分两种情况讨论：

(1)如果H(c)=0，则∵H(a)=0且H(x)在[a,c]可导，∴存在$\xi\in(a,c)\subset(a,b)$使$H'(\xi)=0$.

(2)如果$H(c)\neq0$，则∵$f'(c)=0$∴$H'(c)=\frac{-1}{b-a}H(c)$.而由H(x)的可导性：$H(c)=H(c)-H(a)=H'(x_1)(c-a)$，$x_1\in(a,c)$

收稿日期：2008-10-25
作者简介：胡承钧(1963-)，男，湖北荆州人，沙市大学基础课部副教授，主要从事微积分的研究。

∴ $H'(x_1)H'(c)=\frac{1}{c-a}H(c)\frac{-1}{b-a}H(c)<0$

故由介值定理,也存在ξ∈(a,c)⊂(a,b)使H'(ξ)=0.

由(1),(2)可知总存在ξ∈(a,b),使H'(ξ)=0,

即 $\left[f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{b-a}\right]e^{-x/(b-a)}=0$.

∵ $e^{-x/(b-a)}\neq 0$ 　∴ $f'(x)=\frac{f(x)-f(a)}{b-a}$.

5 设在(-∞,+∞)上,f(x)二次可导且 $|f(x)|\leqslant 1$,又 $|f'(0)|>1$,求证:存在ξ∈(-∞,+∞)使 $f''(x)+f(x)=0$.

分析 解 $f(x)+f''(x)=0$,按无自变量降阶解法可得:$c=\frac{1}{2}\left\{f^2(x)+[f'(x)]^2\right\}$.

∴得 $H(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$.

∵ $H'(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)]$.

∴需要找一个ξ使H'(ξ)=0且f'(ξ)≠0.注意到 $f^2(x)\leqslant 1$,$H(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$,H(0)>1.

∴只要找到一个函数值大于H(0)的驻点ξ就可以了.

证明 令 $H(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$.下面分三种情况进行讨论:

(1)存在 $x_1<0$,$x_2>0$,使 $H(x_1)\leqslant H(0)$,$H(x_2)\leqslant H(0)$.则存在ξ∈(x_1,x_2),使H(ξ)=max$\{H(x)|x\in[x_1,x_2]\}$.

∴ $H'(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)]=0$,且H(ξ)≥H(0).

∵ $H(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2\geqslant H(0)>1$ 且 $f^2(\xi)\leqslant 1$.

∴ $[f'(x)]^2>0$ 即 $f'(x)\neq 0$

∴ $f(x)+f''(x)=0$

(2)对所有的x>0,都有H(x)>H(0).下面证明这是不可能的,否则对所有的x>0有 $H(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2>H(0)>1$,又∵ $|f(x)|\leqslant 1$ ∴ $|f'(x)|>\sqrt{H(0)-1}$.故对所有的x>0,$|f(x)-f(0)|=|f'(x)||x|>\sqrt{H(0)-1}$.x(0<ξ<x),这与 $|f(x)|\leqslant 1$ 矛盾.∴(2)是不可能的.

(3)对所有的x<0,都有H(x)>H(0).与(2)同理这也是不可能的.

综合(1)、(2)、(3)可知存在ξ∈(-∞,+∞),使 $f(x)+f''(x)=0$.

6 证明马克劳林公式:设f(x)在[0,a]上n+1次可导.求证存在ξ∈(0,a),使

$$f(a)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}a+\frac{f''(0)}{2!}a^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}a^n+\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}a^{n+1}$$

分析 将求证变形为 $f^{(n+1)}(x)+\alpha=0$.其中 $\alpha=\left[f(0)+\frac{f'(0)}{1!}a+\frac{f''(0)}{2!}a^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}a^n-f(a)\right]\frac{(n+1)!}{a^{n+1}}$.解 $f^{(n+1)}(x)+\alpha=0$,得c=$f(x)+a\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+c_n\frac{x^n}{n!}+c_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+c_1\frac{x}{1!}$.

∴ 令 $H(x)=f(x)+a\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+c_n\frac{x^n}{n!}+c_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+c_1\frac{x}{1!}$

如令 $H'(0)=H''(0)=\cdots=H^{(n)}(0)=0$ 则 $c_k=-f^{(k)}(0)$,k=1,2,…,n.可以验证此时H(0)=H(a)=f(0).

证明 令 $H(x)=f(x)+a\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+c_n\frac{x^n}{n!}+c_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+c_1\frac{x}{1!}$,其中 $\alpha=\left[f(0)+\frac{f'(0)}{1!}a+\frac{f''(0)}{2!}a^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}a^n-f(a)\right]\frac{(n+1)!}{a^{n+1}}$,$c_k=-f^{(k)}(0)$,k=1,2,…,n.可以验证:H(0)=H(a)且 $H^{(k)}(0)=0$,k=1,2,…,n.

∵H(x)在[0,a]上n+1次可导,又H(0)=H(a)

∴存在 $\xi_1\in(0,a)$ 使 $H'(\xi_1)=0$.

又∵H'(0)=0.

∴存在 $\xi_2\in(0,\xi_1)$ 使 $H''(\xi_2)=0$.

又∵H''(0)=0.

∴存在 $\xi_3\in(0,\xi_2)$ 使 $H'''(\xi_3)=0$.

又∵H'''(0)=0.

… …

… …

$\therefore$存在$\xi_n \in (0, \xi_{n-1})$使$H^{(n)}(\xi_n) = 0$.

又$\because H^{(n)}(0) = 0$.

$\therefore$存在$\xi \in (0, \xi_n) \subset (0,a)$使$H^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) + \alpha = 0$.即为所证.

注释及参考文献：

[1]华东师范大学数学系.数学分析[M].北京：高等教育出版社，2001.

Auxiliary Function's Role in the Prove Title

HU Cheng-jun

(Departerment of Basic Course, Shashi University, Jingzhou, Hubei 434000)

Abstract: This paper analyses the basic method of using auxiliary functions to prove the value in the type of differential equation.

Key words: Proof; Auxiliary function

（上接17页）

[3]孙振久.日本生物技术在蔬菜作物育种上的应用[J].陕西农业科学，1993(6)：34-35.

[4]侯喜林，曹寿椿，余建明.原生质体融合获得不结球白菜胞质杂种[J].园艺学报，2001，28(6)：532-537.

[5]司家刚，朱德蔚，杜永成，等.原生质体非对称融合获得胡萝卜种内胞质杂种[J].园艺学报，2002，29(2)：128-132.

[6]雷建军.利用生物技术发展重庆蔬菜高新技术产业[J].西南园艺，2000，28(1)：19-20.

[7]连勇，刘富中，冯东昕，等.应用原生质融合技术获得茄子种间体细胞杂种[J].园艺学报，2004，31(1)：39-42.

[8]李省印，李孟楼，胡彩霞，等.平菇种内原生质体分离与融和杂交技术研究[J].生物技术通报，2004(11)：580-583.

[9]汪社英，蒋学波.生物技术与蔬菜品种的改良[J].安徽师范大学学报(自然科学版)，2000，23(2)：188-189.

[10]乔爱民，张继栋，尹彩霞，等.生物技术与我国蔬菜育种[J]. 仲恺农业技术学院学报，2008，21(2)：63-71.

[11]高柳谦治[日].生物技术在蔬菜育种中应用的现状与展望[J].北京农业科学，1990，2：38-40.

[12]严智燕，张瑞香.生物技术在育种中的应用[J].安徽农学通报，2008，14(11)：93-96.

[13]汤绍虎，孙敏.蕹菜人工种子研究[J].园艺学报，1994，21(1)：71-75.

[14]沈颖，徐程，张铭.抱子甘蓝组织培养及人工种子研究[J].中国蔬菜，2005(7)：12-14.

The Applied Status Quo and Research Direction of Biotechnology in Vegetable Breeding

ZHAO Kai-ping, ZHOU Xue-mei, TANG You-wang, LIU Zai-lan

(Horticulture Institute of Chengdu Agriculture and Forestry Science, Chengdu, Sichuan 610041)

Abstract: This paper summarized the status quo of biotechnology in vegetable breeding from such aspects as cell engineering, molecular markers and so on; briefly analyzed the applied prospects, and put forward the research of China's current biotechnology in vegetable breeding.

Key words: Biotechnology; Vegetable breeding; Prospects; Research Direction