求函数极值时一个值得注意的问题

周圣毅
（四川化工职业技术学院，四川 泸州 646005）

【摘　要】本文主要是通过对求函数极值的一个结论的讨论来说明教材是学生学习的对象，教师教学的依据，因此必须做到严格与正确。

【关键词】严格极值；广义极值；极值点；驻点
【中图分类号】O174.1　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2008)04-0023-03

一 引言

教材是学生学习的对象，教师教学的依据。因此作为教材在叙述定义、结论等时必须做到严格与正确，这样便于学生学习和教师教学。在一般的工科类《高等数学》中，求函数的极值时都有这样的一个结论："如果函数f(x)在开区间(a,b)内可导且有唯一的极值点x_0(有些书中写的是唯一的驻点)，则当f(x_0)是极大值时，f(x_0)就是f(x)在区间(a,b)内的最大值；当f(x_0)是极小值时，f(x_0)就是f(x)在区间(a,b)内的最小值"。这一结论的直观意义似乎很明显，因此一般的书中都没给予证明（如图1,2）。

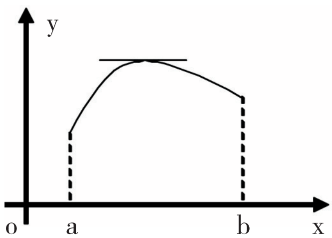

图1

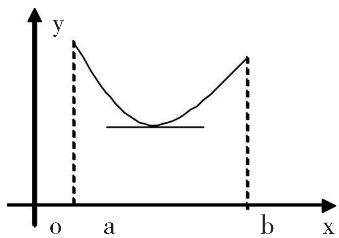

图2

但笔者通过研究发现，这一结论正确与否与极值的定义有关。不同的教材对极值的定义有所不同，但大致上可分为严格极值和广义极值两种。即

定义　设函数f(x)在区间(a,b)内有意义，x_0是其内一点。如果对x_0附近的任意x都有f(x)＜f(x_0)成立，则称f(x_0)是f(x)在区间(a,b)内的（严格）极大值，称x_0为f(x)的（严格）极大值点；反之，若有f(x)＞f(x_0)成立，则称f(x_0)是f(x)的（严格）极小值，称x_0为f(x)的（严格）极小值点。

上面的定义若改成f(x)≤f(x_0)或f(x)≥f(x_0)，则称f(x_0)是f(x)在区间(a,b)内的广义极大(小)值。

大部分教材都是采用的前一种定义形式。如果是这样，前面提到的结论中"有唯一的极值点"这一说法便是错误的。下面略举一例：

$$设,\ f(x)=\begin{cases} x^2+x & -1<x\le 0 \\ \sin x & 0<x\le \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & \dfrac{\pi}{2}<x\le 3 \\ -x^2+6x-8 & 3<x<5 \end{cases}\quad 见图3$$

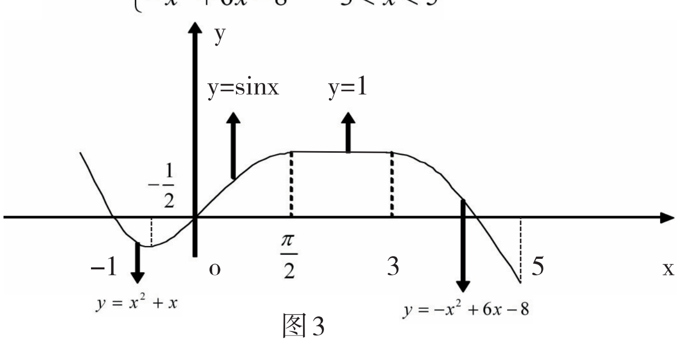

图3

收稿日期：2008-11-13
作者简介：周圣毅（1975-　），男，讲师，主要从事高等数学教学工作。

不难验证此函数在开区间$(-1,5)$内可导，且$x=-\frac{1}{2}$是该函数在开区间$(-1,5)$内唯一的极小值点（注：在严格极值下$[\frac{\pi}{2},3]$内任一点均不是极值点），但$f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$并不是此函数的最小值，此时最小值为$f(5)=-3$。

二 关于以上结论的一点讨论

如果是广义极值，前面的结论才正确。现以极大值情况来证明，极小值情况类似。既证：

命题1 若函数$f(x)$在开区间(a,b)内可导且有唯一的极值点x_0，则当$f(x_0)$是极大值时，$f(x_0)$就是$f(x)$在区间(a,b)内的最大值。

证 1° 先证明$f'(x)$在区间(a,x_0)内保号（注：一般情况下，在极值点x_0的左边或右边近旁$f'(x)$不一定保号，这类反例可参见[美]B.R盖尔鲍姆等著，上海科技出版社出版的《分析中的反例》）

易知，在区间(a,x_0)内$f'(x)$不恒为零，否则若$f'(x)\equiv 0$，则$f(x)\equiv$常数。因此，按广义极值的定义知，在区间(a,x_0)内每一点都是$f(x)$的极大（小）值点，这与命题1中有唯一的极值矛盾。

若$f'(x)$在区间(a,x_0)内不保号，则在区间(a,x_0)内一定存在两点x_1,x_2（不妨设$x_1<x_2$）使$f'(x_1)<0$，$f'(x_2)>0$成立。

由闭区间上连续函数的性质可知，$f(x)$在区间$[x_1,x_2]$上一定能取得最大和最小值。可以证明，此时$f(x)$在区间$[x_1,x_2]$上的最小值不可能在端点x_1,x_2处取得，只能在其内部。

事实上，因$f'(x)<0$，所以由$f'_+(x_1)=f'(x_1)=\lim\limits_{x\to x^+_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<0$

可知，在x_1的右边近旁一定存在一点$\xi_1\in(x_1,x_2)$，

使$f(\xi_1)<f(x_1)$成立 ……………………………………………………………………………………… (1)

同理，由$f'(x_2)>0$，即$f'_-(x_2)=f'(x_2)=\lim\limits_{x\to x^+_2}\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}>0$

在x_2的左边近旁一定存在一点$\xi_2\in(x_1,x_2)$，

使$f(\xi_2)<f(x_2)$成立 ……………………………………………………………………………………… (2)

由(1)(2)两式知，在(x_1,x_2)内还有比端点值$f(x_1)$、$f(x_2)$更小的值$f(\xi_1)$和$f(\xi_2)$

所以，$f(x)$在区间$[x_1,x_2]$上的最小值只能在(x_1,x_2)内部取得，即存在一点$\xi\in(x_1,x_2)$（当然$\xi\neq x_0$），使$f(\xi)\leqslant f(x)$成立 （其中$x\in(x_1,x_2)$）

这样，$f(x)$在区间(a,b)内除x_0外还有另一极值点ξ，这与命题1中有唯一极值矛盾。

从而可知，$f'(x)$在区间(a,x_0)内保号。

同理可证，$f'(x)$在区间(x_0,b)内保号。

2° 再证$f(x_0)$是$f(x)$的最大值

由于$f(x_0)$是$f(x)$的一个极大值。所以，由前面的证明可知，在(a,x_0)内有$f'(x)\geqslant 0$，在(x_0,b)内有$f'(x)\leqslant 0$

因此，$f(x)$在区间(a,x_0)内单调递增，在区间(x_0,b)内单调递减，于是可知$f(x_0)$就是$f(x)$在区间(a,b)内的最大值。（证毕）

若将命题1中"唯一的极值点"改成"唯一的驻点"，所得到的结论对两种极值定义都成立。下面证之：

命题2 若函数$f(x)$在开区间(a,b)内可导且有唯一的驻点x_0，则当$f(x_0)$是极大值时，$f(x_0)$就是$f(x)$在区间(a,b)内的最大值。

证 若此时极值是广义极值，则由定义可知，存在x_0的一邻域$N(x_0,\delta)$，使对任意$x\in N(x_0,\delta)$均有$f(x)\leqslant f(x_0)$成立 ……………………………………………………………………………… (3)

1° 下面证明，在命题2的前提下，(3)式中的等号不成立。

若不然，设在$N(x_0,\delta)$内还有一点x_1（$x_1\neq x_0$，不妨设$x_1<x_0$）使$f(x_1)=f(x_0)$

易知，$f(x)$在$[x_1,x_2]$上满足Rolle中值定理，因此在(x_1,x_0)内至少存在一点ξ_1（$\xi_1\neq x_0$），使$f'(\xi_1)=0$

所以，ξ_1也是$f(x)$在(a,b)内的另一驻点，这与命题2中唯一的驻点矛盾。

因此，有$f(x)<f(x_0)$其中，$x\in N(x_0,\delta)$ ……………………………………………………… (4)

由上面的证明可知，若命题2中的极值是严格极值，那么(4)式以前的推导便是多余的。

2° 现再来证明在区间$(a,b)-N(x_0,\delta)=(a,x_0-\delta)\cup(x_0+\delta,b)$内也有$f(x)<f(x_0)$成立。

若不然，设在$(a,x_0-\delta)\cup(x_0+\delta,b)$内存在一点$x_2$(不妨设$x_2\in(a,x_0-\delta)$，使$f(x_2)\geqslant f(x_0)$成立 ……… (5)

①下面先说明(5)中的等号不成立。

若有$f(x_2)=f(x_0)$成立，则由$f(x)$在$[x_2,x_0]$上满足Rolle中值定理得，在(x_2,x_0)内$f(x)$还存在另一驻点$\xi_2(\xi_2\neq x_0)$，这与命题2唯一的驻点矛盾。

所以，在$(a,x_0-\delta)\cup(x_0+\delta,b)$内$f(x)\neq f(x_0)$ ……… (6)

②现再证明$f(x_2)>f(x_0)$也不成立

若$f(x_2)>f(x_0)$ ……… (7)

现在$(x_0-\delta,x_0)$内取一点x_3[注：若前面的$x_2\in(x_0+\delta,b)$，则就在$(x_0,x_0+\delta)$内取x_3]

由(4)式知，有$f(x_3)<f(x_0)$成立 ……… (8)

结合(7)(8)两式便有$f(x_3)<f(x_0)<f(x_2)$ ……… (9)

因$f(x)$在$[x_2,x_3]$上连续，所以，由介值定理知，在(x_2,x_3)内至少存在一点$x_4(x_4\neq x_0)$使$f(x_4)=f(x_0)$

于是，由$f(x)$在$[x_4,x_0]$满足Rolle中值定理得，在(x_4,x_0)内至少存在一点$\xi_3(\xi_3\neq x_0)$使$f'(\xi_3)=0$，即ξ_3是$f(x)$的另一个驻点，这与命题2有唯一驻点矛盾。

所以，在$(a,x_0-\delta)\cup(x_0+\delta,b)$内(7)式也不成立。

于是结合(6)式可知

在$(a,x_0-\delta)\cup(x_0+\delta,b)$内有$f(x)<f(x_0)$成立 ……… (10)

综合(4)(10)两式可得，$f(x_0)$就是$f(x)$在(a,b)内的最大值。对极小值情况同理可证明。(证毕)

从以上两个命题的证明我们可以看出，极值与广义极值，极值点与驻点是有所不同的，一些教科书中忽略了这一点。因此在给出类似命题1,2的结论时要谨慎，否则会得出错误的结论。不过依笔者之见，最好采用命题2为宜，这样可避免区分极值和广义极值。

注释及参考文献：

[1]陈传章等编写.数学分析[M].北京：人民教育出版社，1979.

[2][美] G.克莱鲍尔.数学分析[M].上海科技出版社，1980.

[3][美] B.R 盖尔鲍姆等著.分析中的反例[M].上海科技出版社，1980.

The Problem of Deserving Attention in Getting Function Extremum

ZHOU Sheng-yi

(Sichuan Chemical Vocational Technology Institute, Luzhou, Sichuan 646005)

Abstract: This paper explains teaching materials are the object of students' learning and the basis of teaching for teachers by discussing the Conclusion of getting function extremum. Therefore, we must obey strictness and correctness.

Key words: Correct extreme value; Generalized extreme value; Extreme point; Stagnation point