关于对合BCK-代数和可交换BCK-代数的一点注记

费秀海,高建华,张海芳
(云南省临沧师范高等专科学校 数学系,云南 临沧 677000)

【摘 要】在本文中主要给出了对合BCK-代数的一些性质,讨论了有界可交换的BCK-代数和对合BCK-代数之间的关系,最后给出了一个对合的BCK-格就是一个可分配的BCK-格的重要结论,这将对BCK-代数的进一步研究有很大帮助。

【关键词】格;BCK-代数;有界的;对合;可交换的;可分配的
【中图分类号】O153.3 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2008)04-0020-03

1 知识预备

定义1.1.[1,2]设X是一个带有常数0的集合,*是X上的一个二元运算,则(X,0,*)被称为一个BCK-代数,当且仅当满足下述几条:

BCk-1 $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$,

BCk-2 $(x*(x*y))*y=0$,

BCk-3 $x\leqslant x$,

BCk-4 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant x$ 蕴含 $y=x$,

BCk-5 $0*x=0$。

我们在BCK-代数(X,0,*)里定义一个二元关系≤,$x\leqslant y$ 当且仅当 $x*y=0$,则我们不难证明(X;≤)是一个偏序集。

定义1.2.[2,3]设(X;≤)是一个偏序集,若X里的任意两个元素都有上确界,则(X;≤)被称为上半格,若X里的任意两个元素都有下确界,则(X;≤)被称为下半格,若(X;≤)既是上半格,又是下半格,则称(X;≤)为格。

定义1.3.[1,4]设(X;≤)是一个格,对于任意的 $a,b,c\in X$,若下述两个等式恒成立:

$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$,$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$则把(X;≤)称为分配格。

设X是一个带有0元和单位元1的格,a,b是X里的一对元素,若有 $a\wedge b=0$ 且 $a\vee b=1$,则a,b其中之一被称为另一个元素的补元。若X里的任意元素a,都有补元,则称X为一个有补格。

在BCK-代数(X,0,*)里,我们用 $x\wedge y$ 表示 $x*(x*y)$,即 $x\wedge y=y*(y*x)$,则我们有:$y\wedge x=x*(x*y)$,且很容易验证 $x\wedge y$ 和 $y\wedge x$ 都是x和y的下界。一般情况下 $x\wedge y$ 和 $y\wedge x$ 是不相等的。

定义1.4.[1]若在BCK-代数(X,0,*)里存在一个元素为1,使得对于X里的任意x,不等式 $0\leqslant x\leqslant 1$ 恒成立,则我们把1称为是一个单位元,把(X,0,*)称为是一个有界的BCK-代数。

例1.1. 设 x={1,2,3,4},*是X上如下表定义的一个二元运算,则我们不难验证X是一个BCK-代数,且是一个有界的BCK-代数。

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0
3	3	2	1	0	0
4	4	2	1	1	0

明显地,4就是X的单位元。

在一个有界BCK-代数里,我们用 Nx 来表示 $1*x$,也就是 $Nx=1*x$。

定理1.1.[2,4]设(X,0,*)一个有界BCK-代数 ,则:

(1)$N0=1,N1=0$ (2)$NNx\leqslant x$ (3)$Nx*Ny\leqslant x$ (4)$1\wedge x=x$ (5)$x\wedge 1=NNx$

(6)$Nx*y=Ny*x$ (7)$NNNx=Nx$。

收稿日期:2008-09-15
作者简介:费秀海(1980-),男,白族,云南大理人,云南民族大学基础数学硕士,临沧师范高等专科学校数理系,助教。

定义1.5.[2]设(x,0,*)是一个有界BCK-代数,x是X里的一个元素,若NNx=x,则把x称为X里的一个对合元素。

我们用S(x)表示由X里所有对合元素构成的集合,也就是S(x)={x | NNx=x,x∈X},则0,1∈S(x),因为:NN0=1*(1*0)=1*1=0且NN1=1*(1*1)=1*0=1。

明显地,我们不难证明(S(x),*,0)是一个BCK-代数,把(S(x),*,0)称作对合BCK-代数。

定义1.6.[2]设(x,0,*)是一个 BCK-代数,则(x,0,*)被称作是一可交换的BCK-代数,当且仅当下述等式成立:

x*(x*y)=y*(y*x)(也就是:x∧y=y∧x)

例1.2. 设x={0,1,2,a,b},*是X上如下表定义的一个二元运算,则我们不难验证X是一个BCK-代数,且X是一个可交换的BCK-代数。

*	0	1	2	*a*	*b*
0	0	0	0	*a*	*a*
1	1	0	0	*a*	*a*
2	2	1	0	*b*	*a*
a	*a*	*a*	*a*	0	0
b	*b*	*a*	*a*	1	0

定理1.2.[3]设(x;*,0)是一个 BCK-代数,则对于任意的x,y,z∈X下述两条恒成立:

(1)x≤y蕴含z*y≤z*x,

(2)x≤y且y≤z蕴含x≤z。

定理1.3.[3,4]设X是一个可交换的BCK-代数,则X一定是一个下半格。

定理1.4.[3]设X是一个对合的BCK-代数且(X,≤)是一个格,则我们有:

x*(y∧z)=(x*y)∨(x*z),x,y,z∈X。

定理1.5.[3,5]设X是一个有界可交换的BCK-代数,则(X,≤)一定是一个格。

定理1.6.[3]是一个有界可交换的BCK-代数,则下述两条恒成立:

(1)Nx∨Ny=N(Nx∧Ny),Nx∧Ny=N(Nx∨Ny),　x,y∈X,

(2)Nx*Ny=y*x,　x,y∈X。

定理1.7.[4,5] X是一个对合的BCK-代数,则下述几条是等价的:

(1)(X,≤)是一个下半格,

(2)(X,≤)是一个上半格,

(3)(X,≤)是一个格。

2 结论

性质2.1.设(X,≤)一个有补格,则(X,≤)一定是一个有界格。

证明是显然的。

性质2.2.设(x,0,*)是一个带有最大元1的有界可交换的BCK-代数,则(x,0,*)一定是对合的BCK-代数。

证明:对于任意的x∈X, 因为NNx=1*(1*x)=x*(x*1)=x*0=x所以由定义1.3,可知X是一个对合的BCK-代数。

定理2.1.设(x,0,*)是一个BCK-代数,对于任意的x,y∈X,若它们的下确界u存在,则:

u=x∧y

证明:假设存在t∈X,且满足t≤x,y,t≥x∧y,则(x∧y)*t=0,因此由定理1.2我们有(x∧y)≤t⇒y*(x*y)≤t⇒(y*t)*(y*x)=0⇒(y*t)≤(y*x)⇒t≥x,这与我们的假设矛盾,因此不存在t∈X且t≤x,y,使得(x∧y)*t成立,所以u=x∧y就是x和y的下确界,从而定理得证。

定理2.2.设X是一个有界的BCK-代数,则下述两条是等价的:

(i)X对合,

(ii)Nx*Ny=y*x,　x,y∈X。

证明:先证"(i)⇒(ii)",由于 $Nx*Ny=(1*x)*(1*y)=(1*(1*y))*x$,且 $1*(1*y)=NNy$,又因为X是对合的,所以有 $1*(1*y)=NNy=y$,也就是 $Nx*Ny=(1*x)*(1*y)=(1*(1*y))*x=y*x$。

再证明由"(ii)⇒(i)",在(ii)里面设 $x=1$,则有 $N0*Ny=1*Ny=NNy=y*0=y$,所以对于任意的 $y\in X$,我们有 $NNy=y$,从而由定义1.5知X是一个对合的BCK-代数,从而定理得证。

定理2.3.设X是一个可交换的BCK-代数,则下述等式恒成立:

$(x*y)*(x*z)=(z*y)*(z*x) \quad x,y,z\in X$

证明:因为X是可交换的,因此有 $(x*y)*(x*z)=(x*(x*z))*y=(z*(z*x))*y=(z*y)*(z*x)$,从而定理得证。

性质2.3.设X是一个可交换的BCK-代数,则对于任意的 $x,y,z\in X$,我们有:

$x\leqslant z$ 蕴含 $x*y=x*(y\wedge z)$。

证明:由定理1.4,我们有 $x*(y\wedge z)=(x*y)\vee(x*z)$,又因为 $x\leqslant z\Rightarrow x*z=0$,所以对于任意的 $x,y,z\in X$,我们有 $x*(y\wedge z)=(x*y)\vee 0=x*y$,从而定理得证。

定理2.4.设 $(X,\leqslant)$ 是一个对合的BCK-代数,且 $(X,\leqslant)$ 是一个格,则 $(X,\leqslant)$ 一定是一个分配格当且仅当下述等式成立:

$x*(y\vee z)=(x*y)\wedge(x*z), \quad x,y,z\in X$

证明:因为 $(X,\leqslant)$ 是一个格,则 $(X,\leqslant)$ 是可交换的,则有 $x\wedge(y\vee z)=(y\vee z)$

$*((y\vee z)*x)=x*(x*(y\vee z))$,且如果 $x*(y\vee z)=(x*y)\wedge(x*z)$ 恒成立,那么就有

$x*(x*(y\vee z))=x*((x*y)\wedge(x*z))$,又由定理1.4,得:$x*((x*y)\wedge(x*z))=(x*(x*y))\vee(x*(x*z))=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$,从而有 $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$,所以由定义1.3得证X是一个可分配的BCK-代数,从而定理得证。

注释及参考文献:

[1]Ieski. Some properties of BCK−algebra, Math.Seminar Notes 1974 (2):2−212.

[2]Ieski. A special class of BCK−algebra, Math.Seminar Notes .

[3]Menjie BCK−algebra.

[4]C.S.Hoo. Bounded commutative BCK−algebras satisfying D.C.C,Math .Japon−ica, 1987(32).

[5]Grzaslewiccz .on some problem on BCK−algebra ,Math.Japonica,1980 (25):487−500.

A Note about Involutory BCK-algebra and Commutative BCK-algebra

FEI Xiu-hai, GAO Jian-hua, ZHANG Hai-fang

(Department of Math, Junior College Level Normal School, Lincang, Yunnan 677000)

Abstract: In this paper, we mainly gave out some properties about involutory BCK-algebra, also studied the relaxations of bounded commutative BCK-algebra and involutory BCK-algebra. Finally gave out an important result that an involutory BCK-lattice is a distributive BCK-lattice, which is will very helpful to further study of BCK-algebra.

Key words: Lattice; BCK-algebra; Bounded; Involutory; Commutative; Distributive