第22卷第3期 西昌学院学报·自然科学版 Vol.22,NO.3
2008年9月 Journal of Xichang College·Natural Science Edition Sep.,2008

模型化在高等数学学习中的运用

林亚河
(漳州城市职业学院,福建 漳州 363000)

【摘 要】从数学的范围和意义上,模型化的研究着重通过考察实际问题合理构造相应的数学模型,或应用数学模型使实际问题得以解决。作为学习者,依据个人知识经验积累和认知特点,对数学模型的构造或应用,应具有个体的模型化认识和模型化意识。

【关键词】模型化认识;模型化意识
【中图分类号】O13-4 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2008)03-0070-04

1 问题提出

"模型化或模型方法是通过抽象、概括和一般化,把研究的对象或问题转化为本质(关系或结构)同一的另一对象或问题加以解决的思维方法。"[1]诸多书刊对于数学模型方法,着重从数学的范围和意义上,研究通过考察实际问题合理构造相应的数学模型,或应用数学模型使实际问题得以解决。本文以学习者个人知识经验积累和认知特点,阐述应如何具有数学概念形成的模型化认识和数学概念应用的模型化意识,从而提升对数学模型化的直觉运用水平。

2 数学概念形成的模型化认识

"数学模型,是针对或参照某种事物系统的主要特征、主要关系,用形式化数学语言,概括地近似地表达出来的一种数学结构。"[2]一切数学概念、数学理论体系、各种数学公式、方程式、函数关系以及公式系统构成的算法系统等等,都是数学模型。因此,对数学概念定义、数学结论形式的分析,注重从数学模型的转化去加以认识,可以提高对数学概念的更深层次的理解。

2.1 作为客体替代物的模型化认识

模型,是人们为了某种特定的目的,而对客体原型所作的一种简化的描述。作为客体替代物的模型,我们在认识上应当注意以下几点:模型是对现象系统的抽象或模仿,它和客体原型之间在特性、结构或功能行为等方面具有某种相似关系;模型是由哪些与研究问题有关的部分或因素构成,在认识过程中怎样加以研究;模型作为认识的特殊手段,如何发挥模型方法的作用。

例1 "导数概念"作为客体替代物的模型

导数概念从现实原型(瞬时速度)引入,直至本质特征(自变量的"局部变化率")的揭露,它作为客体替代物的模型,经历"初级状态"向"高层次理性认识"的发展过程。

设某质点运动方程S=s(t),则在时刻t_0的瞬时速度$\nu(t_0)$表示如下:

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} \quad (1)$$

由此引入函数y=(f_x)在x=x_0处的导数概念:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad (2)$$

可见,式(2)形式$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$中以字母x代换式(1)中的$\lim_{t\to 0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$,保持了符号对量的表示的相似性,但以$f'(x_0)$取代了$v(t_0)$,却意味着上述两个式子的不同意义。"将导数概念与瞬时速度的概念加以比较,容易看出,两者的区别主要在于,后者从属于运动这一特定的问题,前者则由于舍弃了其它成分而仅仅着眼于量的关系的分析获得了更为普遍的意义……从而,与瞬时速度不同,导数的概念就应被看成一个模式,它以纯数学的形式表明了一类事物或现象(包括抽象事物)所具有的共同的量性特征。"[3]

2.2 作为数学自身的理论与问题研究的模型化认识

数学表述的形式化是数学抽象特点的体现,理解符号的结构与关系成为理解并掌握概念的关键环节。

收稿日期:2008-08-10

作者简介:林亚河(1950-),男,讲师,主要从事数学教育研究。

理解一个概念要懂得本身规定的内部联系,且要从它与其他概念的外部关系中去理解。

例2“函数f(x)在点x_0连续”定义的不同形式叙述。

“三种不同形式来叙述函数f(x)在点x_0的连续的定义。

1. 当自变量增量$\triangle x=x-x_0$为无穷小时,对应的函数增量

$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$也是无穷小。

2. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

3. 对任意给定的$\varepsilon>0$存在着$\delta>0$,当$|\triangle x|\leqslant\delta$时,不等式$|\triangle y|\leqslant\varepsilon$成立。

这三种形式实质上是表达同一个概念,其间没有丝毫本质上的区别,但是在应用时,有时采用这一形式比较适合,有时则采用那一形式比较适合……”[4]

比较函数f(x)在点x_0连续的两种表述:

(1)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$;(2)$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$。

式(1)以关系式$\nabla y=f(x)-f(x_0)$容易推出式(2),这是一种理性具体化的模型化过程。因此,式(2)是一种更为抽象的形式表述。

从内涵上分析,表述(1)具有三个明显特征:f(x)在点x_0有定义;f(x)的极限存在(当$x\to x_0$时);f(x)的极限值与函数值相等。表述(2)仅以∇y及∇x的变化趋势刻画函数的连续性。

从应用上分析,应用表述(1)对各类函数间断点问题可以分门别类进行讨论。如,讨论常见的非初等函数:分段函数、带绝对值的函数以及由极限定义的函数的连续性,以及不满足连续性条件的各不相同情况而产生的不同类型的间断点:可去间断点,跳跃间断点,无穷间断点,振荡间断点等问题。而应用表述(2)在阐述其他有关问题时,却恰到好处。如,“函数f(x)在点x_0处可导必连续”,其论证是如此简明。由$f'(x)=\lim\limits_{\nabla x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$在,即得

$\lim\limits_{\nabla x\to 0}\nabla y=\lim\limits_{\nabla x\to 0}\dfrac{\nabla y}{\nabla x}\cdot\nabla x=\lim\limits_{\nabla x\to 0}\dfrac{\nabla y}{\nabla x}\cdot\lim\limits_{\nabla x\to 0}\nabla x=f'(x)\cdot 0=0$,即上述结论成立。

2.3 依据自己的认知特点组建结构和图式的模型化认识

“专家知识的特点在于其涉及到有组织的概念结构图式的发展,这些结构图式能够说明问题的表征和理解的方式。学生要学习像专家那样来构建概念结构和图式,但是要紧的是必须通过自己的具体认知活动来组建属于自己的结构和图式。”[5]面对各种信息的可能组合,依据个人认知经验的积累,恰当使用数学符号或独具个性的心理构造的符号表征系统组建属于自己的结构和图式,是深化学习思考的捷径。

例3“函数f(x)在点x_0处的微分”的形式改换

课程设计者在一个既成的课程中,以逻辑方法展现微分概念子系内的各种关系,而对学习者却处于不显形的状态。学习者要通过自己的“挖掘”将其明朗化,如运用展现线符、关系线符、演变线符等“符线”联接方法,反映微分概念子系的演变形态和属性变化。构思如下:

(1)$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)\xrightarrow{\text{其中}A\cdot\nabla x\text{称为}}(2)\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x\xrightarrow{A=f'(x_0)}$

(3)$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot\Delta x\xrightarrow{\mathrm{d}x=\nabla x}$　(4)$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$

式(1)不仅表示一种现实原型(金属正方形薄片的面积改变量),而且是函数f(x)在点x_0处可微分的条件;式(2)作为金属正方形薄片面积改变量的近似值并以“记作”的术语引入微分概念;式(3)以极限理论推$f'(x_0)=A$并将式(2)进行形式改换;式(4)以函数y=x的微分恒等于增量的事实,将式(3)进行形式改换。因此,上面的线符刻画了微分的产生及其与导数的关系。

在前面的学习中,“$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$”被视作关于导函数的一个整体记号。从上面的改写结果,“于是,我们以前把看作整个记号的那个表达式,现在就可以当作分数来处理了……莱伯尼兹在考察微分时,同时亦曾考察《微商》,即两个微分的商,那就相当于我们的导数……”[6]

3 数学概念应用的模型化意识

数学模型就是实际问题的形式化,是用数学语言和方法对各种实际对象作出抽象或模仿而形成的一种数学结构,它能解释特定对象的现实状态,又能提供处理对象的最优决策或控制。运用数学知识解决实际问题的时候,就应该注重数学对象形式特征的考察,强化模型化意识。

3.1 寻找数学“联结点”的意识

作为数学"联结点"的基本概念、基本原理和基本结构,它们蕴含着丰富的内涵,又具有很强的迁移力、再生力和固化新知识的功能。具体而言,由内在联结点将知识体系串起来,有如下四个方面:一个知识体系的起始点,一个知识体系到另一个知识体系的转折点,几个相关知识体系的统合点,一个知识体系的延伸点。据此,从中寻找到数学知识中本质的、感性的信息。

例4 不定积分的信息链。

如,已知f(x)的一个原函数是$(1+\sin\theta)\ln x$,求$\int xf'(x)\mathrm{d}x$。

作为原函数、导函数、不定积分的统合点,信息链接如下:

f(x)的一个原函数是$(1+\sin\theta)\ln x \xrightarrow{\text{可表示为}} \int xf'(x)\mathrm{d}x=(1+\sin\theta)\ln x$ C

或f(x)=$[(1+\sin\theta)\ln x]'$ =cos θ lnx+$(1+\sin\theta)/x$

这样,由$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$便可求出结果。

又如,求$\int\frac{dx}{1+e^x}$。考虑$(1+e^x)'=e^x$,这道题的难处在于被积函数的分子怎样产生一个e^x,这是凑微分的起始点。原式可化为如下的4种情形:

(1)$\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x-\int\frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$;(2)$\int\frac{e^x\,\mathrm{d}x}{e^x(1+e^x)}=\int(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{1+e^x})\mathrm{d}e^x$;

(3)$\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x(1+e^{-x})}=-\int\frac{\mathrm{d}e^{-x}}{1+e^{-x}}$;(4)$\int\frac{e^{-x}\,\mathrm{d}x}{e^{-x}(1+e^x)}=\int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}e^{-x}}{1+e^{-x}}$。

3.2 分析数学对象共同特征的意识

"共同特征和本质属性是概括的2个关键因素……概括是在不断分析对象共同特征的过程中抽取本质属性,既是在对象的个性和共性中寻找区别和联系,达到对事物的本质认识。"[7]

在数学学习过程中,要善于把具有共同特征的数学对象结合起来进行考察,寻找和抽取其中内在关系和规律,概括出问题发展的规律或者一类问题的解决方法。

例5 命题中给出抽象函数所满足的函数关系式的形式概括

在一些命题中给出抽象函数所满足的函数关系式,诸如:

(1)$f(xy)=f(x)+f(y)$;(2)$f(x+y)=f(x)+f(y)$,

(3)$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$……

这些函数关系式的共同特征是变量和、变量积、函数和、函数积的相互转化。使用这些关系式,经常采用"赋值法",以特殊值0或1代入式中去探求结果。

如,设对非零x、y,有$f(xy)=f(x)+f(y)$,且$f'(1)=a$,试证:当x≠0时,$f'(x)=\frac{x}{a}$

当x=1,y=1时,有$f(1\cdot1)=f(1)+f(1)=2f(1)$,因此$f(1)=0$。

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f[x(1+h/x)]-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(1+h/x)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h/x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h/x)-f(1)}{h}=\cdots\cdots=\frac{f'(1)}{x}=\frac{a}{x}$$

3.3 识别数学对象形状结构的意识

数学的形式化总是借助于数学符号来完成的。数学符号是对数学结果的表示。数学对象在经历复合、综合、变位、变式的过程中,呈现块状的相似、对称、交错等现象。如果通过异同比较,辨认其相似的程度,构成相似链,在问题解决的过程中,可促使问题的变更和转化。

例6 块状结构形似的识别与引进辅助函数

如,设n∈N,证明$\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}+\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}}\le2\sqrt[n]{n}$,n≥2。

考察块状$\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}$、$\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}}$及$\sqrt[n]{n}$外层的相似形"$\sqrt[n]{\ }$",视作模型$\sqrt[n]{口}$,其中口为$n+\sqrt[n]{n}$、$n-\sqrt[n]{n}$或n,可引进辅助函数$f(x)=\sqrt[n]{x}$(x>0)。证明如下:

方法1 运用Taylor公式:若$f''(x)<0$,则$f(x)\le f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

设$x_0=n,x=n\pm\sqrt{n}$,由$f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$,$f''(x)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1-n}{n}x^{\frac{1-2n}{n}}<0$,得

$f(n+\sqrt[n]{n})\le f(n)+f'(x)(\sqrt[n]{n})$,$f(n-\sqrt[n]{n})\le f(n)+f'(n)(-\sqrt[n]{n})$

两式相加即得$f(n+\sqrt[n]{n})+f(n-\sqrt[n]{n})\le2f(n)$结论成立。

方法2 运用琴森(jenson)不等式:若f(x)是凸函数,则有不等式:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

$f(x)=\sqrt[n]{x}$ 是凸函数,令 $x_1=n+\sqrt[n]{n}, x_2=n-\sqrt[n]{n}$,则 $(x_1+x_2)/2=n$,由上式,有 $\sqrt[n]{n} \geq \frac{(\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}})+(\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}})}{2}$,结论成立。

3.4 对同一数学对象赋予不同解释的意识

"数学模型是一种观念模型,一种以某种方式以解释的符号(数学符号)系统表示的模型。"[8]在数学中,有相当多的东西,由于其外表形式的差异,似乎一般多将他们作为单个的对象来看待,其实它们都有同一的精神和思想。如果把这种"同一的精神和思想"以不同方式解释出来,就可以使得所学的零散知识形成有机的整体。

例7 积化和差 $f(x)g(x)=f(x)\pm g(x)$,视其为一种模型,可找到多种多样的形式结构给以解释,如:

$tg^2x\sin^2x=tg^2x-\sin^2x$;$\cos 2x(1-\frac{1}{2}\sec^2x)=\cos 2x-(1-\frac{1}{2}\sec^2x)$;

$\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}$;$\frac{ax+b}{cx+d}\cdot\frac{ax+b}{(a-c)x+b-d}=\frac{ax+b}{cx+d}-\frac{ax+b}{(a-c)x+b-d}$;

$tgA(tgB\cdot tgC)=tgA+(tgB\cdot tgC)=tgA+(tgB+tgC)\ (A+B+C=\pi)$

积化和差的观念模型,体现分解的思想,运用上面各式在解题中有独特用处。其中,以模型 $\frac{1}{W(W+1)}$ 联想公式 $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$,给不定积分计算带来许多方便。

如,求 $\int\frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}dx$

原式 $=\int[\ln(\frac{x+1}{x})](\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x})dx=\cdots\cdots=-\frac{1}{2}\ln^2(\frac{x+1}{x})+C$

又如,计算 $\int\frac{(x+1)dx}{x(1+xe^x)}$,被积函数中的 $\frac{1}{x(1+xe^x)}$ 欲呈现模型 $\frac{1}{W(W+1)}$,应是 $\frac{1}{xe^x(1+xe^x)}$,

故原式 $=\int\frac{e^x(x+1)dx}{xe^x(1+xe^x)}=\int(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{1+xe^x})d(xe^x)=\cdots=x+\ln\frac{x}{1+xe^x}+c$

注释及参考文献:

[1]马忠林.数学思维论[M].南宁:广西教育出版社,1996:137.

[2]赵振威.数学发现导论[M].合肥:安徽教育出版社,2000:236.

[3]马忠林.数学方法论[M].南宁:广西教育出版社,1996:106.

[4]同济大学数学教研室.高等数学学习方法指导书(上册)[M].北京:人民教育出版社,1982:53.

[5]涂荣豹.专家知识的特征及其数学教学的启示[J].数学教育学报,2005,14(4):9.

[6]Γ.M菲赫金哥尔茨;北京大学高等数学教研室译.微积分学教程 第一卷 第一分册[M].北京:人民教育出版社,1978:209.

[7] 涂荣豹,陈 嫣.数学学习中的概括[J].数学教育学报,2004,13(1):17.

[8] 徐树道.数学方法论[M].桂林:广西师范大学出版社,2002:115.

On the Application of Modeling in the Learning of Advanced Mathematics

LIN Ya-he

(*Zhangzhou City Vocational College, Zhangzhou, Fujian 363000*)

Abstract: On the mathematical scope and significance, the study of modeling will construct the relevant mathematical model reasonably by investigating the practical problems, or the application of mathematical models to solve the practical problems. As a mathematical learner, according to the personal knowledge, experience and cognitive characteristic, we should have the individual cognition and consciousness for modeling.

Key words: Cognition of modeling; Consciousness of modeling