

# 广义隐拟变分包含的 带扰动Ishikawa迭代算法

任 晓, 谭兴凯, 敬景荣, 辛邦颖

(西昌学院 数理系, 四川 西昌 615022)

**【摘 要】** 本文引入了 $H$ 空间中一类关于极大 $\eta$ -单调映象的完全广义隐拟变分包含, 利用预解算子技术建立了这类变分包含解的Ishikawa迭代和Mann迭代算法逼近, 证明了其解的存在性以及由算法生成的迭代序列的收敛性。

**【关键词】** 完全广义隐拟变分包含; 极大 $\eta$ -单调映象; 预解算子; Ishikawa和Mann迭代算法

**【中图分类号】** O177.91 **【文献标识码】** A **【文章编号】** 1673-1891(2005)04-0071-04

## 1 预备知识

设为具有范数 $\|\cdot\|$ 与内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的实Hilbert空间, $2^H$ 表示 $H$ 中所有非空子集所成的幂集, $H(\cdot,\cdot)$ 是 $2^H$ 上的Hausdorff距离, $I$ 表示 $H$ 内的恒等映象。

设 $N:H\times H\rightarrow H$ 和 $g,m:H\rightarrow H$ 是单值映象, $A^i:H\rightarrow 2^H$ 是集值映象( $i=1,2,\dots,5$ ),设 $W:H\times H\rightarrow 2^H$ 是集值映象,且对 $\forall z\in H,W(\cdot,z):H\rightarrow 2^H$ 是极大 $\eta$ -单调映象,且 $g(H)-m(H)\cap \text{dom}(W(\cdot,z))\neq\Phi$ .我们考虑以下的变分包含问题:

$$\begin{cases} \text{找 } x, u, v, s, h, z \in H, \text{ 使得} \\ u \in A_1(x), v \in A_2(x), s \in A_3(g(x)), h \in A_4(x), \\ z \in A_5(x) \text{ 且} \\ 0 \in N(u, v) - s + W(g(x) - m(h), z) \end{cases} \quad (1.1)$$

本文利用极大 $\eta$ -单调映象的预解算子技术讨论变分包含问题(1.1)解的Ishikawa和Mann迭代算法与其收敛性, 推广了文献<sup>[1)(2)(3)(6)]</sup>的相应结果。

**定义1.1** 设 $g:H\rightarrow H$ 是单值映象, $A:H\rightarrow 2^H$ 是集值映象,称 $g$

(1)  $\kappa$ -Lipschitz连续的, 如果:  $\exists \kappa > 0$ , 使得  $\|g(x) - g(y)\| \leq \kappa \|x - y\|, \forall x, y \in H$ .

(2)  $\beta$ -强单调的, 如果:  $\exists \beta > 0$ , 使得  $\langle x - y, g(x) - g(y) \rangle \geq \beta \|x - y\|^2, \forall x, y \in H$ .

**定义1.2**<sup>[3]</sup> 设 $\eta:H\times H\rightarrow H$ 是一个单值映射, $M:H\rightarrow 2^H$ 是一个集值映象。

(1) 称 $\eta$ 是 $\beta$ -强单调的, 如果:  $\exists \beta > 0$ , 使得  $\langle x - y, \eta(x, y) \rangle \geq \beta \|x - y\|^2, \forall x, y \in H$ .

$\langle x - y, \eta(x, y) \rangle \geq \beta \|x - y\|^2, \forall x, y \in H$ .

(2) 称 $\eta$ 是 $\kappa$ -Lipschitz连续的, 如果:  $\exists \kappa > 0$ , 使得  $\langle x - y, \eta(x, y) \rangle \leq \kappa \|x - y\|, \forall x, y \in H$ .

(3) 称 $M$ 是 $\eta$ -单调的, 如果:  $\langle u - v, \eta(x, y) \rangle \geq 0, \forall x, y \in H, u \in m(x), v \in M(y)$ .

(4) 称 $M$ 是极大 $\eta$ -单调的, 如果:  $M$ 是 $\eta$ -单调的且 $(I + \rho)$ . (5) 称 $M$ 是 $\lambda$ - $H$ -Lipschitz连续的, 如果:  $\exists \lambda > 0$ , 使得:  $H(M(x), M(y)) \leq \|x - y\|, \forall x, y \in H$ .

**注1.2** 当时, 定义1.3中的(5)~(6)即为传统意义下的单调、极大单调概念。

**定义1.3**  $N:H\times H\rightarrow H$ 被称为

(1) 第一变元Lipschitz连续的, 存在常数 $r > 0$ 使得  $\|N(\cdot, x) - N(\cdot, y)\| \leq r \|x - y\| \quad \forall x, y \in H$

(2) 第一变元关于映象 $A$ 松弛Lipschitz连续的, 存在一个常数 $\delta > 0$ 使得

$$\langle x - y, N(u, \cdot) \rangle \leq -\delta \|x - y\|^2$$

$$\forall x, y \in H \quad u \in Ax, v \in Ay$$

类似地, 可以定义 $N:H\times H\rightarrow H$ 第二变元Lipschitz连续。

## 2 迭代算法

**引理2.1**<sup>[3]</sup> 设 $\eta:H\times H\rightarrow H$ 严格单调且 $M:H\rightarrow 2^H$ 是极大 $\eta$ -单调映象, 则对 $\forall \rho > 0$ , 逆映象 $(I + \rho M)^{-1}$ 是单值的。

利用引理2.1我们能够定义极大 $\eta$ -单调映象 $M$

收稿日期: 2005-09-06

基金项目: 西昌学院2005年自然科学类科研项目。

作者简介: 任晓(1958-)男, 副教授, 研究方向: 非线性泛函分析。

的预解算子如下:

$$J_M^p(Z) = (I + \rho M)^{-1}(Z), \forall Z \in H$$

引理 2.2<sup>[4]</sup> 设  $\eta: H \times H \rightarrow H$  是  $\beta$ -强单调和  $\kappa$  连续的,  $M: H \rightarrow 2^H$  是极大  $\eta$ -单调映象, 则  $M$  的预解算子  $J_M^p$  是  $\frac{\kappa}{\beta}$ -Lipschitz 连续的。即  $\|J_M^p(x) - J_M^p(y)\| \leq \frac{\kappa}{\beta} \|x - y\| \forall x, y \in H$ 。

引理 2.3<sup>[8]</sup> 设  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  非负实数序列满足  $a_{n+1} \leq (1 - \alpha_n)a_n + \delta_n$ , 其中  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty \in [0, 1]$ ,  $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n = \infty$ , 且  $\delta_n \rightarrow 0$  ( $\alpha_n$ ), 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

由引理 2.1 和引理 2.2 我们很容易得到

引理 2.4  $(x, u, v, s, h, z)$  是问题 (1.1) 的解当且仅当  $(x, u, v, s, h, z)$  满足

$$g(x) = m(h) + \int_{M(x)}^p (g(x) - m(h) - \rho N(u, v) + \rho s). \quad (2.1)$$

其中  $u \in A_1(x), v \in A_2(x), s \in A_3(x), h \in A_4(x), z \in A_5(x)$ , 且  $\rho > 0$  是常数。

注 2.1 由引理 2.3 知变分包含问题 (1.1) 与下列不动点问题等价:

对任意给定  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\exists x \in H, u \in A_1(x), v \in A_2(x), s \in A_3(x), h \in A_4(x), z \in A_5(x)$  使得:

$$x = (1 - \lambda)x + \lambda [x - g(x) + m(h) + \int_{M(x)}^p (g(x) - m(h) - \rho N(u, v) + \rho s)] \quad (2.2)$$

利用 (2.2) 式我们可以构造变分包含问题 (1.1) 解的 Ishikawa 迭代和 Mann 迭代算法:

算法 2.1 设  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$  和  $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$  是两个序列, 且  $\alpha_n, \beta_n \in [0, 1], \sum_{n=0}^\infty \alpha_n = \infty$ , 设  $\{e_n\}_{n=0}^\infty$  和  $\{r_n\}_{n=0}^\infty$  是  $H$  中的两个序列, 对于任意给定的  $x_0 \in H, \bar{u}_0 \in A_1(x_0), \bar{v}_0 \in A_2(x_0), \bar{s} \in A_3(x_0), \bar{h}_0 \in A_4(x_0), \bar{z}_0 \in A_5(x_0)$ , 设

$$y_0 = (1 - \beta_0)x_0 + \beta_0 [x_0 - g(x_0) + m(\bar{h}_0) + \int_{W(\cdot, z_0)}^p (g(x_0) - m(\bar{h}_0) - \rho N(\bar{u}_0, \bar{v}_0) + \rho \bar{s}_0)] + \beta_0 e_0$$

对于任意给定的  $u_0 \in A_1(y_0), v_0 \in A_2(y_0), s_0 \in A_3(g(y_0)), h_0 \in A_4(y_0), z_0 \in A_5(y_0)$ , 设

$$x_1 = (1 - \alpha_0)x_0 + \alpha_0 [y_0 - g(y_0) + m(h_0) + \int_{M(x_0)}^p (g(y_0) - m(h_0) - \rho N(u_0, v_0) + \rho s_0)] + \alpha_0 r_0$$

由此可定义序列  $\{y_n\}, \{x_n\}, \{\bar{u}_n\}, \{\bar{v}_n\}, \{\bar{s}_n\}, \{\bar{h}_n\}, \{h_n\}, \{z_n\}$ , 如下:

$$\begin{cases} y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n [x_n - g(x_n) + m(\bar{h}_n) + \int_{W(\cdot, z_n)}^p (g(x_n) - m(\bar{h}_n) - \rho N(\bar{u}_n, \bar{v}_n) + \rho \bar{s}_n)] + \beta_n e_n \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n [y_n - g(y_n) + m(h_n) + \int_{M(x_n)}^p (g(y_n) - m(h_n) - \rho N(u_n, v_n) + \rho s_n)] + \alpha_n r_n \end{cases} \quad (2.3)$$

其中  $\bar{u}_n \in A_1(x_n), \bar{v}_n \in A_2(x_n), \bar{s}_n \in A_3(g(x_n)), \bar{h}_n \in A_4(x_n), \bar{z}_n \in A_5(x_n), u \in A_1(y_n), v \in A_2(y_n), s \in A_3(g(y_n)), h \in A_4(y_n), z \in A_5(y_n)$  且常数  $\rho > 0$ 。

若算法 2.1 中对  $\forall_n \geq 0$  令  $\beta_n = 0$ , 则我们可以得到如下的 Mann 迭代算法:

算法 2.2 设  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$  是一个序列, 且  $\alpha_n \in [0, 1], \sum_{n=0}^\infty \alpha_n$  发散, 设  $\{r_n\}_{n=0}^\infty$  是  $H$  中的一个序列。对于任意给定的  $u_0 \in A_1(x_0), v_0 \in A_2(x_0), s_0 \in A_3(g(x_0)), h_0 \in A_4(x_0), z_0 \in A_5(x_0)$ , 设

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n [x_n - g(x_n) + m(h_n) + \int_{M(x_n)}^p (g(x_n) - m(h_n) - \rho N(u_n, v_n) + \rho s_n)] + \alpha_n r_n \quad (2.4)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$  其中  $u_n \in A_1(x_n), v_n \in A_2(x_n), s_n \in A_3(g(x_n)), h_n \in A_4(x_n), z_n \in A_5(x_n)$  且常数  $\rho > 0$ 。

### 3 存在性与收敛性

定理 3.1 设  $A_i: H \rightarrow 2^H$  是集值映象且  $A_i$  是  $\lambda_i$ -Lipschitz 连续的 ( $i = 1, 2, \dots, 5$ )。设  $g: H \rightarrow H$  是  $u_1$ -强单调和  $\kappa_{11}$ -Lipschitz 连续的,  $m: H \rightarrow H$  是  $\kappa_{12}$ -Lipschitz 连续的,  $\eta: H \times H \rightarrow H$  是  $u_1$ -强单调和  $\kappa_{13}$ -Lipschitz 连续的,  $N: H \times H \rightarrow H$  第一变元  $\kappa_{21}$ -Lipschitz 连续和第一变元关于映象  $A_1$  是  $u_3$ -松弛 Lipschitz 连续的, 且第二变元  $\kappa_{22}$ -Lipschitz 连续的, 设  $W: H \times H \rightarrow 2^H$  是集值映射, 使得对  $\forall z \in H, W(\cdot, z): H \rightarrow 2^H$  是极大  $\eta$ -单调的, 且  $g(x) - m(h) \cap \text{dom}(W(\cdot, z)) \neq \Phi, \forall x, y \in H$ 。假设

$$\forall x, y \in H, \|\int_{W(\cdot, z)}^p(Z) - \int_{W(\cdot, y)}^p(Z)\| \leq \sigma \|x - y\| \quad (3.1)$$

且存在常数  $\rho > 0$  使得

$$\vartheta = (1 + \tau) \sqrt{1 - 2\mu_1 + \kappa_{11}^2} + \tau \sqrt{1 - 2\mu_3\rho + \kappa_{21}^2\lambda_1\rho^2} + \tau\rho(\kappa_{22}\lambda_2 + \kappa_{11}\lambda_3) + (1 + \tau)\kappa_{12}\lambda_4 + \sigma\lambda_5 < 1 \quad (*)$$

算法 2.1 中序列  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \{\beta_n\}_{n=0}^\infty, \{e_n\}_{n=0}^\infty, \{r_n\}_{n=0}^\infty$  满

足对  $\forall n \geq 0, \alpha_n, \beta_n \in [0, 1], \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ , 且当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\|e_n\| \rightarrow 0, \|r_n\| \rightarrow 0$ , 则  $\exists x^* \in H, u^* \in A_1(x^*), v^* \in A_2(x^*), s^* \in A_3(g(x^*)), h^* \in A_4(x^*), z^* \in A_5(x^*)$  是问题 (1.1) 的解, 且由算法 2.1 得到的迭代序列  $\{x_n\}, \{u_n\}, \{v_n\}, \{s_n\}, \{h_n\}, \{z_n\}$  分别强收敛于  $x^*, u^*, v^*, s^*, h^*, z^*$ .

证明: 记  $\tau = \frac{\kappa_{13}}{\mu_2} f(x, h, u, v, s) = g(x) - m(h) - \rho N(u, v) + \rho s$ . 利用 (2.2) 式我们可以得到对所有  $n \geq 0$ :

$$x^* = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n[x_n - g(x_n) + m(\bar{h}_n) + J_{W(\cdot, \cdot)}^{\rho}(g(x_n)) - m(h^*) - \rho N(u^*, v^*) + \rho s^*]$$

$$x^* = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n[x_n - g(x_n) + m(\bar{h}_n) + J_{W(\cdot, \cdot)}^{\rho}(g(x_n)) - m(h^*) - \rho N(u^*, v^*) + \rho s^*]$$

由算法 2.1, 对所有我们有

$$\begin{aligned} & \|y_n - x^*\| \|(1 - \beta_n)x_n + \beta_n[x_n - g(x_n) + m(\bar{h}_n) + J_{W(\cdot, \cdot)}^{\rho}(g(x_n)) - m(\bar{h}_n) - \rho N(\bar{u}_n, \bar{v}_n) + \rho s_n] + \beta_n - [(1 - \beta_n)x^* + \beta_n(x^* - g(x^*) + m(h^*) + J_{W(\cdot, \cdot)}^{\rho}(g(x^*)) - m(h^*) - \rho N(u^*, v^*) + \rho s^*)]\| \\ & \leq (1 - \beta_n) \|x_n - x^*\| + \beta_n \|x_n - x^* - (g(x_n) - g(x^*))\| + \beta_n \|m(\bar{h}_n) - m(h^*)\| + \beta_n \|J_{W(\cdot, \cdot)}^{\rho} f(x_n, \bar{h}_n, \bar{u}_n, \bar{v}_n, \bar{s}_n) - J_{W(\cdot, \cdot)}^{\rho} f(x^*, h^*, u^*, v^*, s^*)\| + \beta_n \|e_n\| \\ & \leq (1 - \beta_n) \|x_n - x^*\| + \beta_n \|x_n - x^* - (g(x_n) - g(x^*))\| + \beta_n \|m(\bar{h}_n) - m(h^*)\| + \beta_n \|J_{W(\cdot, \cdot)}^{\rho} f(x_n, \bar{h}_n, \bar{u}_n, \bar{v}_n, \bar{s}_n) - J_{W(\cdot, \cdot)}^{\rho} f(x^*, h^*, u^*, v^*, s^*)\| + \beta_n \|e_n\| \end{aligned} \quad (3.2)$$

因为  $g$  是  $\mu$ -强单调的  $\kappa_{11}$ -Lipschitz 连续的,  $m$  是  $\kappa_{12}$ -Lipschitz 连续, 利用 Noor [6] 技巧我们有

$$\|x_n - x^* - (g(x_n) - g(x^*))\| \leq \sqrt{1 - 2\mu_1 + \kappa_{11}^2} \|x_n - x^*\| \quad (3.3)$$

$$\|m(\bar{h}_n) - m(h^*)\| \leq \kappa_2 \| \bar{h}_n - h^* \| \leq \kappa_2 H(A_4(x_n), A_4(x^*)) \leq \kappa_{12} \lambda_4 \|x_n - x^*\| \quad (3.4)$$

由引理 2.2, 我们有

$$\begin{aligned} & \|J_{W(\cdot, \cdot)}^{\rho} f(x_n, \bar{h}_n, \bar{u}_n, \bar{v}_n, \bar{s}_n) - J_{W(\cdot, \cdot)}^{\rho} f(x^*, h^*, u^*, v^*, s^*)\| \\ & \leq \tau \|f(x_n, \bar{h}_n, \bar{u}_n, \bar{v}_n, \bar{s}_n) - f(x^*, h^*, u^*, v^*, s^*)\| \\ & \leq \tau \{ \|x_n - x^* - (g(x_n) - g(x^*))\| + \|m(\bar{h}_n) - m(h^*)\| + \|x_n - x^* + \rho(N(\bar{u}_n, \bar{v}_n) - N(u^*, \bar{v}_n))\| + \rho \|N(u^*, \bar{v}_n) - N(u^*, v_n)\| + \rho \|\bar{s}_n - s^*\| \} \end{aligned} \quad (3.5)$$

因为  $N$  第一变元是  $\kappa_{12}$ -Lipschitz 连续且关于映象  $A_1$  是  $\mu_3$ -松弛 Lipschitz 连续的, 第二变元是  $\kappa_{22}$ -Lipschitz 连续性, 我们有

$$\|x_n - x^* + \rho(N(\bar{u}_n, \bar{v}_n) - N(u^*, \bar{v}_n))\|^2 \leq (1 - 2\rho\mu_3 + \lambda_{11}^2 \rho^2 \kappa_{21}^2) \|x_n - x^*\|^2 \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & \|N(u^*, \bar{v}_n) - N(u^*, v^*)\| \leq \kappa_{12} \|\bar{v}_n - v^*\| \\ & \leq \kappa_{12} H(A_2(\bar{x}_n), A_2(x^*)) \leq \lambda_2 \kappa_{22} \|x_n - x^*\| \end{aligned} \quad (3.7)$$

由于  $A_3$  是  $\lambda_3$ -Lipschitz 连续的,  $g$  是  $\kappa_{11}$ -Lipschitz 连续的, 我们有

$$\begin{aligned} & \|\bar{s}_n - s^*\| \leq H(A_3(g(x_n)), A_3(g(x^*))) \leq \lambda_3 \|g(x_n) - g(x^*)\| \\ & \leq \lambda_3 \kappa_{11} \|x_n - x^*\| \end{aligned} \quad (3.8)$$

由条件 (3.1), 我们有

$$\begin{aligned} & \|J_{W(\cdot, \cdot)}^{\rho} f(x^*, h^*, u^*, v^*, s^*) - J_{W(\cdot, \cdot)}^{\rho} f(x^*, h^*, u^*, v^*, s^*)\| \\ & \leq \sigma \|\bar{z}_n - z^*\| \leq \sigma H(A_5(s_n), A_5(x^*)) \leq \sigma \lambda_5 \|x_n - x^*\| \end{aligned} \quad (3.9)$$

综合 (3.2)~(3.9) 以及条件 (\*), 我们可以得到

$$\begin{aligned} & \|y_n - x^*\| \leq \{(1 - \beta_n) + \beta_n[(1 + \tau)\sqrt{1 - 2\mu_1 + \kappa_{11}^2} + \tau\sqrt{1 - 2\mu_3 + \kappa_{21}^2 \lambda_1^2 \rho^2} + \tau\rho(\kappa_{22}\lambda_2 + \kappa_{11}\lambda_3) + (1 + \tau)\kappa_{12}\lambda_4 + \sigma\lambda_5]\} \\ & \|x_n - x^*\| + \beta_n \|e_n\| = (1 - \beta_n + \beta_n v \|x_n - x^*\| + \beta_n \|e_n\| = (1 - (1 - v)\beta_n) \|x_n - x^*\| + \beta_n \|e_n\| \leq \|x_n - x^*\| + \beta_n \|e_n\| \end{aligned} \quad (3.10)$$

类似前面的讨论有

$$\begin{aligned} & \|x_{n+1} - x^*\| = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n[y_n - g(y_n) - m(h_n) + J_{W(\cdot, \cdot)}^{\rho}(g(y_n)) - m(h_n) - \rho N(u_n, v_n) + \rho s_n] + \alpha_n \gamma_n - [(1 - \alpha_n)x^* + \alpha_n(x^* - g(x^*) + m(h^*) + J_{W(\cdot, \cdot)}^{\rho}(g(x^*)) - m(h^*) - \rho N(u^*, v^*) + \rho s^*)] \\ & \leq (1 - \alpha_n) \|x_n - x^*\| + \alpha_n \{ (1 + \tau)\sqrt{1 - 2\mu_1 + \kappa_{11}^2} + \tau\sqrt{1 - 2\mu_3 + \kappa_{21}^2 \lambda_1^2 \rho^2} + \tau\rho(\kappa_{22}\lambda_2 + \kappa_{11}\lambda_3) + (1 + \tau)\kappa_{12}\lambda_4 + \sigma\lambda_5 \} \|y_n - x^*\| + \alpha_n \|r_n\| \end{aligned} \quad (3.11)$$

将 (3.10) 代入 (3.11) 可得

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq (1 - (1 - \vartheta)\alpha_n) \|x_n - x^*\| + \alpha_n(\vartheta\beta_n \|e_n\| + \|r_n\|) = (1 - (1 - \vartheta)\alpha_n) \|x_n - x^*\| + \delta_n$$

其中  $\delta_n = (\vartheta\beta_n \|e_n\| + \|r_n\|)\alpha_n$ . 由于当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\|e_n\| \rightarrow 0, \|r_n\| \rightarrow 0$ , 可以得到当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\vartheta\beta_n \|e_n\| + \|r_n\| \rightarrow 0$ , 于是  $\delta_n = o((1 - \vartheta)\alpha_n)$ . 由此我们根据引理 2.3 可以得到  $x_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$ . 因为  $A_i: H \rightarrow 2^H$  是  $\lambda_i$ -Lipschitz 连续的 ( $i=1, 2, \dots, 5$ ), 于是  $\|u_n - u^*\| \leq H(A_1(x_n), A_1(x^*)) \leq \lambda_1 \|x_n - x^*\| \rightarrow 0$ , 即  $u_n \rightarrow u^* (n \rightarrow \infty)$ .

$\infty$ ), 同理可得, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $v_n \rightarrow v^*, s_n \rightarrow s^*, h_n \rightarrow h^*, z_n \rightarrow z^*$  由引理 2.4 知  $(x^*, u^*, v^*, s^*, h^*, z^*)$  是问题 (1.1) 的解。证毕。

注 3.1 在定理 3.1 的假设条件下, 若对  $\forall_n \geq 0$ ,

$\beta_n = 0$ , 则由算法 2.2 定义的带扰动的 Mann 迭代序列  $\{x_n\}, \{u_n\}, \{v_n\}, \{s_n\}, \{h_n\}, \{z_n\}$  分别强收敛于  $x^*, u^*, v^*, s^*, h^*, z^*$ , 且  $(x^*, u^*, v^*, s^*, h^*, z^*)$  是问题 (1.1) 的解。

**参考文献:**

[1] X.P. Ding, A new class of generalized nonlinear implicit quasivariational inclusions with fuzzy mappings, J. Comput. Appl. Math. 138 (2002) 243~257.  
 [2] Y.X.Tian, Generalized nonlinear implicit quasi-variational inclusions with fuzzy mappings, Comput.Math.Appl.42 (2001) 101~108.  
 [3] N.J. Huang et al., Generalized nonlinear mixed quasivariational inequalities, Comput.Math.Applic.40(2000) 205~215.  
 [4] N.J. Huang and Y. P. Fang, A new class of general variational inclusions involving maximal monotone mappings, Publ. Math. Debrecen. 62 (2003) 83~98.  
 [5] S.B. Nadler, Jr., Multi-valued contraction mappings, Pacific J. Math. 38 (1969) 475~488.  
 [6] X.P.Ding, Perturbed Ishikawa type iterative algorithm for generalized quasivariational inclusions, Appl. Math. Comput.141 (2003),359~373.  
 [7] N.J. Huang Completely generalized nonlinear variational inclusions for fuzzy mappings.Czechoslovak. Mathematical. Journal, 49(124)(1999) 767~777  
 [8] X..L.Weng, Fixed Point iteration for local strictly pseudo-contractive mapping. Proc. AM. Math. Soc. 113(3)(1991) 727~731.

## Perturbed Ishikawa Type Iterative Algorithm for Generalized Implicit Quasivariational Inclusions

REN XIAO, TAN Xing-kai, JING Jing-rong, XIN Bang-ying

(Department of Mathematics and Physics, Xichang College, Xichang 615022, Sichuan)

**Abstract:** In this paper, we introduced a new class of completely generalized implicit quasivariational inclusion involving maximal  $\eta$ -monotone mappings in  $E$ . Using the resolvent operator technique, we constructed perturbed Ishikawa and Mann type iterative algorithms for the variational inclusion. Furthermore, we proved the existence of solution for the variational inclusion and proved the convergence of the iterative sequences generated by these algorithms.

**Key words:** Completely generalized implicit quasivariational inclusion; Maximal  $\eta$ -monotone mappings; Resolvent operator; Ishikawa and Mann iterative algorithms

(责任编辑:李道华)