随机变量分布函数的富里埃-司蒂阶变换

兰箭轮，彭方林

（西昌学院，四川 西昌 615000）

【摘 要】特征函数也可称为对随机变量分布函数的富里埃-司蒂阶变换,它在概率论中的引入将概率论的理论研究推到了一个新的阶段。本文讨论其实效。

【关键词】随机变量；特征函数；应用；分布

【中图分类号】O175.9 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2005)01-0092-03

1 引言

我们知道，随机变量的分布函数全面地描述了随机变量的统计规律,以分布函数为基础,可以比较仔细地讨论随机变量的数字特征、运算性质等问题。然而,分布函数或分布密度这些工具,有时使用起来并不方便。以求随机变量的和的分布来说,若ξ_1与ξ_2是两个相互独立的随机变量，其密度分别为p1(x),p2(x)，则求$\xi=\xi_1+\xi_2$的密度函数时需计算卷积p=p1(x)＊p2(x),如果要求n个相互独立的随机变量ξ_1,ξ_2,……,ξ_n的和$\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$的分布密度。那么就要计算n-1 次卷积。这可不是一件轻松的事。

在初等数学中，已知对数变换能把乘法运算变成加法运算将运算简单化；在数学分析中，富里埃(Fourier)变换能把卷积运算变成乘法运算。受此启发,人们在概率论中引进了“特征函数”的概念,即对随机变量分布函数的富里埃-司蒂阶变换。可以毫不夸张地说,概率论自从引进了特征函数以后,就把理论的研究推到一个新的阶段。

2 特征函数的定义

定义：设ξ是定义在概率空间上的随机变量,它的分布函数为F(x),称$\lambda^{it\xi}$的数学期望$E(\lambda^{it\xi})$为ξ的特征函数。有时也称为分布函数为F(x)的特征函数。其中,$i=\sqrt{-1}$,$t\in R_1$,记ξ的特征函数为$\varphi_\xi(t)$或$\varphi(t)$。

如果对复的随机变量的数学期望的定义如下：若复随机变数为Z=X+Yi，其中X,Y均为实随机变量,则Z的数学期望定义为：E(Z)=E(X)+iE(Y)

由于 $\lambda^{it\xi}=\cos t\xi+i\sin t\xi$

故:
$$\varphi(t)=E(\lambda^{it\xi})=E(\cos t\xi)+iE(\sin t\xi)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos tx\,dF(x)+i\int_{-\infty}^{+\infty}\sin tx\,dF(x)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^{itx}dF(x)$$

因此,ξ的特征函数也可称之为对分布函数$F(x)$的富里埃—司蒂阶变换。

3 主要结论

定理1:任一随机变量的特征函数总是存在的。

因为对任意$t\in R_1$,$\cos t\xi$及$\sin t\xi$均为有界连续函数,故$E(\cos t\xi)$及$E(\sin t\xi)$均为有限。因此,特征函数总是存在的。

定理2:随机变量的分布函数由其特征函数唯一决定,即有唯一性定理:分布函数$F_1(x)$ 及$F_2(x)$恒等的充分必要条件是它们的特征函数$\varphi_1(t)$及$\varphi_2(t)$恒等。(其证明见〔1〕中P238)。

4 应用

1、证明二项分布的普阿松逼近定理。

证明:二项分布的特征函数为①

$$f_n(t)=(P_n\lambda^{it}+q_n)^n=[1+\frac{nP_n(\lambda^{it}-1)}{n}]^n$$

若当 $n\to\infty$,$np_n\to\lambda$,则

$$nP_n(\lambda^{it}-1)\to\lambda(\lambda^{it}-1) \qquad (n\to\infty)$$

收稿日期:2004-11-30

作者简介:兰箭轮(1960-),男,副教授。研究方向:概率论。

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)=exp[\lambda(\lambda^{it}-1)]=f(t)$

$f(t)$是普阿松分布$P(\lambda)$的特征函数。②

由逆极限定理得证。

2、证明普阿松分布当$(\lambda\to\infty)$时,渐近正态分布。

证明:设ξ_λ服从参数为λ的普阿松分布,则

特征函数 $f_{\xi\lambda}(t)=exp[\lambda(\lambda^{it}-1)]$

令$\eta_\lambda=\frac{\xi_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$,并在下式中按泰勒公式展开λ^{it}得

$$f_{\eta\lambda}(t)=\lambda^{-1\sqrt{\lambda}t}f_{\xi\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$=exp[-i\sqrt{\lambda}t+\lambda(\lambda^{it/\sqrt{\lambda}}-1)]$$

$$=exp\left[-i\sqrt{\lambda}t+i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\lambda-\frac{t^2}{2}+o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]$$

$$=exp\left[-\frac{t^2}{2}+o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]\to\lambda^{-\frac{1}{2}t^2}\qquad(\lambda\to\infty)$$

由逆极限定理得,普阿松分布当$(\lambda\to\infty)$时,渐近正态分布。

3、 用特征函数法证明德莫佛-拉普拉斯(*De Moivre-Laplace*)定理。

证明:即要证:若μ_n是n次贝努里试验中事件出现的次数,$0<p<1$,则对任意有限区间$[a,b]$,当$n\to\infty$时一致地有:

$$p\left\{a\leq\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}<b\right\}\to\int_a^b\varphi(x)dx$$

(其中 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda^{-\frac{1}{2}x^2},q=1-p$)

因为μ_n服从二项分布$b(k;n,p)$,所以它的特征函数为$f_n(t)=(q+p\lambda^{it})^n$

而 $(\mu_n-np)/\sqrt{npq}$ 的特征函数为

$$g_n(t)=\left[q+pexp\left(\frac{it}{\sqrt{npq}}\right)\right]^n\cdot exp\left(-\frac{npit}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$\left[qexp\left(-\frac{pit}{\sqrt{npq}}\right)+pexp\left(\frac{qit}{\sqrt{npq}}\right)\right]^n$$

按泰勒公式展开λ^z得

$$\lambda^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+o(z^2)$$

从而有 $pexp\left(\frac{qit}{\sqrt{npq}}\right)=p+it\sqrt{\frac{pq}{n}}-\frac{qt^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)$

$$pexp\left(-\frac{qit}{\sqrt{npq}}\right)=p-it\sqrt{\frac{pq}{n}}-\frac{qt^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

代入$g_n(t)$得

$$g_n(t)=\left[1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n\to\lambda^{-\frac{1}{2}t^2}\qquad(n\to\infty)$$

而$\lambda^{-\frac{1}{2}t^2}$是标准正态分布$N(0,1)$的特征函数③。

4、 用特征函数法求广义二项分布的数学期望与方差。

解:服从广义二项分布的随机变量η能够表为和:

$$\eta=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

其中ξ_k $(k=1,2,\wedge\wedge n)$相互独立,且ξ_k服从

$p\{\xi_k=1\}=p_k,p\{\xi_k=0\}=1-p_k$

的0-1分布。

显然ξ_k的特征函数$\varphi_k(t)=1+p_k(\lambda^{it}-1)$,从而$\eta$的特征函数为

$$\varphi(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_k(t)=\prod_{k=1}^{n}[1+p_k(\lambda^{it}-1)]$$

$$\varphi'(t)|_{t=0}=\sum_{l=1}^{n}\left[\varphi_l'(t)\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\varphi(t)\right]\Bigg|_{t=0}$$

$$=\sum_{l=1}^{n}ip_l\lambda^{it}\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}[1+p_k(\lambda^{it}-1)]\Bigg|_{t=0}$$

$$=\sum_{l=1}^{n}ip_l$$

$$\varphi''(t)|_{t=0}=\sum_{l=1}^{n}ip_l\left\{\lambda^{it}\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}[1+p_k(\lambda^{it}-1)]\right\}'$$

$$=\sum_{l=1}^{n}ip_l\left\{i\lambda^{it}\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}[1+p_k(\lambda^{it}-1)]+\sum_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{n}ip_m\lambda^{it}\prod_{\substack{k=1\\k\neq l\\k\neq m}}^{n}[1+p_k(\lambda^{it}-1)]\right\}\Bigg|_{t=0}$$

$$=\sum_{l=1}^{n}ip_l\left[i+\sum_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{n}ip_m\right]$$

所以:

$$E(\eta)=\frac{1}{i}\varphi'(0)=\sum_{l=1}^{n}p_l,$$ ④

$$E(\eta^2)=\frac{1}{i^2}\varphi''(0)=\sum_{l=1}^{n}p_l\left[1+\sum_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{n}p_m\right],$$

$$D(\eta)=E(\eta^2)-E^2(\eta)$$

$$=\sum_{l=1}^{n}p_l+\sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{n}p_{lp}-\left(\sum_{l=1}^{n}p_l\right)^2=\sum_{l=1}^{n}p_l(1-p_l)$$

从以上几个应用，我们可以看出特征函数是概率论中一有力的工具！

参考文献：

〔1〕中山大学数学力学系．概率论及数理统计〔M〕．人民教育出版社，1980.3第1版．
〔2〕魏宗舒.概率论及数理统计〔M〕.高等教育出版社，1983.10，第1版．

Fourier–Stieltjes Transform of Distribution Function of Random Variable

LAN Jian-lun , PENG Fang-lin

(*Xichang College*, *Xichang 615000*, *Sichuan*)

Abstract: Characeristic Function can also be called Flourier-Stieltjes transform of distribution function of random variable. Its application in probability theory makes the theory study of probability be on a new stage. We will discuss its actual effect in this paper.

Key words: Random variable; Characeristic function; Application; Distribution