边缘分布确定的多元Copula函数构建*

黄 君
(四川工商职业技术学院 基础部,四川 都江堰 611830)

【摘 要】从二维随机变量(TRV)的边缘分布函数(MDF)与其联合分布函数(JDF)的关系出发,研究如何构建多维随机变量(MRV)的联合分布Copula函数,并对构建的函数进行拟合与检验。首先,简单介绍Copula函数的定义、SKlar定理和常用的函数类型;然后将TRV变量的MDF函数与其JDF函数的关系扩展到MRV变量;最后研究了TRV变量的MDF函数已知时,构建其JDF函数的方法,同时将其扩展到MRV变量,提出了新的构建MRV变量的JDF函数的方法,对构建的函数提出了相应的拟合方法和参数估计方法。

【关键词】Copula函数;边缘分布;多元随机向量;联合分布函数。
【中图分类号】O211.3 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2014)02-0022-04

1 引言

在概率论中,二维随机向量(Two-dimensional Random Vector,TRV)与多维随机向量(Multivariate Random Vector,MRV)和联合分布(Joint Distribution Function,JDF)与边缘分布(Marginal Distribution Function,MDF)等是重要的概念,也是学习概率论必须掌握的概念。建立MDF与JDF的对应关系,是进一步研究相依情况下的概率特性所必须的。

若随机向量(X,Y)的JDF函数$F(x,y)$已知,则$F(x,y)$具有以下性质[1]:

(1)$\forall(x,y)\in R^2$,有$0\le F(x,y)\le 1$;

(2)若变量x固定,则$F(x,-\infty)=0$;若y固定,同样有$F(-\infty,y)=0$成立;

(3)$F(-\infty,-\infty)=0,F(+\infty,+\infty)=1$;

(4)若存在任意的$x_1\le x_2,y_1\le y_2$,则有
$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\ge 0$成立;

(5)变量X,Y的MDF函数可由其JDF函数$F(x,y)$唯一确定,即:

$$F(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\lim_{y\to+\infty}P\{X\le x,Y\le y\};$$

$$G(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\lim_{x\to+\infty}P\{X\le x,Y\le y\}。$$

因此,当TRV的JDF函数已知时,可唯一确定各变量的MDF函数。但在实际应用和可靠性数学中,TRV的MDF函数可方便求得,待研究和讨论的是其JDF函数;另一方面,若TRV的MDF函数已知,则其JDF函数不具有唯一性。

将TRV变量的JDF函数与MDF函数的关系,扩展到MRV变量时,若各变量的MDF函数已知,就需要构建其JDF函数。因此,本文利用Copula函数理论,研究当各变量的MDF已知时,如何构建其JDF函数的Copula型函数,并对其进行相应的研究。

2 Copula函数理论

2.1 Copula函数定义

1959年Abe Sklar首次将Copula一词引入数学中。Copula函数理论,提供了一种解决当随机向量的MDF函数未知时,构建其JDF函数的方法;当随机向量的MDF已知时,Copula函数理论将其MDF函数与JDF函数建立连接关系,同时,为建立随机向量的JDF函数提供了理论基础,为研究随机向量间的相依性提供方法。

定义1[2] 设$C(u)=C(u_1,u_2,\cdots,u_n)$是n维空间函数:$I^n\to I$,(其中$I=[0,1]$)。若满足:

①对任意$u_k\in I,k=1,2,\cdots,n$,有
$C(u_1,\cdots,u_{k-1},0,u_{k+1},\cdots u_n)=0,C(1,\cdots,1,u_k,1,\cdots,1)=u_k$;

②$C(u)$为n维增函数,即$\exists a_k,b_k$,若$0\le a_k\le b_k\le 1$,$k=1,2,\cdots,n$(记$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$,$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$),有:

$$\Delta_a^b C(u)\ge 0$$

其中:$\Delta_a^b C(u)=\Delta_{a_n}^{b_n}\Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\cdots\Delta_{a_2}^{b_2}\Delta_{a_1}^{b_1}C(u)$,
$\Delta_a^b C(u)=C(u_1,\cdots,u_{k-1},b_k,u_{k+1},\cdots u_n)-C(u_1,\cdots,u_{k-1},a_k,u_{k+1},\cdots,u_n)$,$k=1,2,\cdots,n$;

则称$C(u)$为n-Copula函数。

当$n=2$时,得到二维Copula函数的定义:设$C(u_1,u_2)$是二维空间函数:$[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$。若满足:

①$\exists u,v\in[0,1]$,有$C(u,0)=C(0,v)=0,C(1,v)=v,C(u,1)=u$;

②$\exists u_1,u_2,v_1,v_2\in[0,1]$,且$u_1\le u_2,v_1\le v_2$,有
$C(u_2,v_2)-C(u_1,v_2)-C(u_2,v_1)+C(u_1,v_1)\ge 0$。

由定义1得到Copula函数的性质为:

(1)$C(u)=C(u_1,u_2,\cdots,u_n)$是定义在$[0,1]^n$上的$n$元分布函数,即$C:[0,1]^n\to[0,1]$;

(2)$C(u)=C(u_1,u_2,\cdots,u_n)$对每个变量$u_i(i=1,2,\cdots,n)$都为单调递增函数;

收稿日期:2014-02-02
*基金项目:四川省科技厅项目(项目编号:2012ZZ048);四川省教育厅重点项目(项目编号:10ZA008)。
作者简介:黄君(1974-),女,重庆丰都人,讲师,研究方向:应用数学。

(3) $C(u)=C(u_1,u_2,\cdots,u_n)$的各边缘分布$C_i$满足:

$C_i(u_i)=C(1,1,\cdots,1,u_i,1,\cdots,1)=u_i$,其中$u_i\in[0,1],i=1,2,\cdots,n$;

(4) $\forall u_i[0,1]$,$i\in[1,n]$,有$C(u_1,\cdots,u_{i-1},0,u_{i+1},\cdots,u_n)=0$。

(5)对任意$(u_1,\cdots,u_n)\in[0,1]^n$,有

$\min\{u_1,\cdots,u_n\}\le C(u_1,\cdots u_n)\le\max\{u_1,\cdots,u_n\}$,

即Copula函数具有有界性;同时,当$n=2$时,$\min\{u_1,\cdots,u_n\}$和$\max\{u_1,\cdots,u_n\}$为Copula函数;当$n>2$时,$\max\{u_1,\cdots,u_n\}$为Copula函数,而$\min\{u_1,\cdots,u_n\}$就不恒为Copula函数。

上述5条性质,可从性质(3)得到:若n维随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$中,仅有一个分量的边缘分布外,其余各个分量的边缘分布恒为1,则n维随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布由边缘分布不为1的分量的边缘分布唯一确定。同理,从性质(4)可知,若n维随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$中只要有一个分量的边缘分布恒为0,则n维随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布也为0。

2.2 SKlar定理

Copula函数是定义在$[0,1]^n$内的MRV的JDF函数,其基础是SKlar定理。

定理1[3](SKlar定理)设$X_i,i=1,2,\cdots,n$是MRV变量,MDF函数为$F_i(x),i=1,2,\cdots,n$;

①若$F_i(x),i=1,2,\cdots,n$的JDF为$H(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则

ⅰ)存在n元Copula函数$C(u_1,u_2,\cdots,u_n)$,使得

$$H(x_1,x_2,\cdots,x_n)=C(F_1(x_1),F_2(x_2),\cdots,F_n(x_n)),-\infty<x_i<+\infty,i=1,2,\cdots,n;\quad(1)$$

ⅱ)若$F_i(x),i=1,2,\cdots,n$是连续的,则Copula函数唯一。

②若$C(u_1,u_2,\cdots,u_n)$是一个Copula函数,令

$$H(x_1,x_2,\cdots,x_n)\triangleq C(F_1(x_1),F_2(x_2),\cdots,F_n(x_n))\quad(2)$$

则$H(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是$X_i(i=1,2,\cdots,n)$的一个JDF函数,且各变量的MDF函数为$F_i(x),i=1,2,\cdots,n$。

因此,可用MDF函数和Copula理论来构造具有相依关系的JDF函数。MRV变量的JDF函数为$H(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则其密度函数(Density Function,DF)为:

$$h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial H(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2,\cdots,\partial x_n}=\frac{\partial C[F_1(x_1),\cdots,F_n(x_n)]}{\partial x_1,\cdots,\partial x_n}=c[F_1(x_1),\cdots,F_n(x_n)]\prod_{i=1}^{n}f_i(x_i)\quad(3)$$

其中h,c,f_i分布为H,C,F_i的DF函数,且c为:

$$c(u_1,\cdots,u)=\frac{\partial C(u_1,\cdots,u_n)}{\partial u_1,\cdots,\partial u_n}\quad。\quad(4)$$

2.3 常用的Copula函数

任意给定MRV的MDF函数,可用Copula函数构建其JDF函数,以刻划和描述各变量间的相依特性。Copula函数类型较多,其中正态Copula函数族和阿基米德族Copula函数(Archimedean Copula Function,ACF)族为使用较多的Copula函数类型[4]。

正态Copula函数可表示为:

$$C(u_1,\cdots u_n;\rho)=\Phi_\rho[\Phi^{-1}(u_1)+\cdots+\Phi^{-1}(u_n)],\quad(5)$$

其中:p为相关系数矩阵;$\Phi_\rho[\Phi^{-1}(u_1)+\cdots+\Phi^{-1}(u_n)]$为以$p$为参数的标准多元正态JDF函数;$\Phi^{-1}(u)$为标准正态分布的逆函数。

由式(5)可知,多元正态Copula函数对具有对称特性的数据是非常适合的[5]。

ACF可描述为:

$$C(u_1,\cdots u_n;\rho)=\varphi^{-1}[\varphi(u_1)+\cdots+\varphi(u_n)],\quad(6)$$

其中:$\varphi(\cdot)$为Archimedean生成函数。表1为ACF族的生成函数,其中θ为相关参数[6]。

表1　ACF族的生成函数

类别	生成函数	参数取值范围
Gumbel	$(-\ln u)^\theta$	$[1,+\infty)$
Clayton	$(u^{\theta}-1)/\theta$	$[-1,0)\cup(0,+\infty)$
Frank	$\ln(e^{\theta}-1)-\ln(e^{\theta u}-1)$	$\theta\neq0$

因此,ACF函数种类较多,可用于描述和分析不同类型的数据。Gumbel ACF函数对变量的上尾变化非常敏感,而Clayton ACF函数对下尾变化敏感;Frank ACF函数适合描述具有对称性数据的相依关系。

3 多元联合分布与边缘分布之间的关系

在下面的探讨中,假设$F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2),\cdots,F_{X_n}(x_n)$为随机变量序列$X_1,X_2,\cdots,X_n$的MDF函数;$H(x_1,\cdots,x_n)$为其JDF函数[7]。

定义1 若MRV变量的JDF函数$H(x_1,\cdots,x_n)$为已经,则可唯一确定各变量的MDF函数为

$F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2),\cdots,F_{X_n}(x_n)$,即:

$F_{X_1}(x_1)=H(x_1,+\infty,\cdots,+\infty)=P\{X_1\le x_1,X_2\le+\infty,\cdots,X_n\le+\infty\}$;

$F_{X_2}(x_2)=H(+\infty,x_2,+\infty,\cdots,+\infty)]=P\{X_1\le+\infty,X_2\le x_2,X_3\le+\infty,\cdots,X_n\le+\infty\}$;

…

$F_n(x_n)=H(+\infty,\cdots,+\infty,x_n)=P\{X_1\le+\infty,\cdots,X_{n-1}\le+\infty,X_n\le x_n\}$。

定义2 若MRV变量间相互独立,则其JDF函数与MDF函数为相互唯一确定,即有:

$$H(x_1,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)\times F_{X_2}(x_2)\times\cdots\times F_{X_n}(x_n)\quad。\quad(7)$$

定理2 若$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为MRV变量,且MDF函数已知,则存在唯一n维Copula函数$C_n(u_1,u_2,\cdots,u_n)$,使得对任意$x_1,x_2,\cdots,x_n\in R$有:

$$P\{X_1\le x_1,\cdots,X_n\le x_n\}=C_n(F_{X_1}(x_1),\cdots,F_{X_n}(x_n)),\quad(8)$$

其中:$F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2),\cdots,F_{X_n}(x_n)$为指数型分布,即:

$F_{X_i}(x_i)=1-e^{-\int_0^{x_i}\lambda_i(t)dt}$($\lambda_i(t)$为非负函数,$i=1,2,\cdots,n$)。

定义3 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为MRV变量,且存在r维

随机分向量 $X_r=(X_1,\cdots,X_r)$ 和 $(n-r)$ 维随机分向量 $X_{n-r}=(X_{r+1},\cdots X_n)$（$1\le r<n$），若随机向量 X_r 的 r 维JDF函数为：

$$H_r(x_r)=C_r(u_1,\cdots,u_r)=P\{X_1\le x_1,\cdots,X_r\le x_r\}=C_r(F_{X_1}(x_1),\cdots,F_{X_r}(x_r)),$$

且随机向量 X_{n-r} 的 $(n-r)$ 维JDF函数为：

$$H_{n-r}(x_{n-r})=C_{n-r}(u_{r+1},\cdots,u_n)$$

$$=P\{X_{r+1}\le x_{r+1},\cdots,X_n\le x_n\}=C_{n-r}(F_{X_{r+1}}(x_{r+1}),\cdots,F_{X_n}(x_n)),$$

则存在唯一确定的JDF函数 $H(X_r,X_{n-r})$ 与 r 维随机分向量 $X_r=(X_1,\cdots,X_r)$ 和 $(n-r)$ 维随机分向量 $X_{n-r}=(X_{r+1},\cdots X_n)$ 的Copula C_r 和Copula C_{n-r} 之间一一对应，且对任意 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in R$，有：

$$\max\{H_r(x_r)+H_{n-r}(x_{n-r})-1,0\}\le H(x_r,x_{n-r})\le\min\{H(x_r),H(x_{n-r})\}\text{。}\quad(9)$$

由以上定义和定理可知，若MRV变量的各个分量的MDF函数已知时，可使用Copula函数理论构建MRV变量的JDF函数，以研究各变量间的相依特性。

4 构建Copula函数

4.1 二维Copula函数的构建

当TRV变量的MDF函数分别为 $F(x),G(y)$ 时，可使用不同的Copula函数，可构建不同的TRV变量的JDF函数 $H(x,y)$，且所有的JDF函数满足定义3，即：

$$\max\{F(x)+G(y)-1,0\}\le H(x,y)\le\min\{F(x),G(y)\}\text{。}\quad(10)$$

定义4 若 (X,Y) 的边缘分布为连续型分布，且假设 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，即 (X,Y) 的MDF函数分别为：

$F(x)=\Phi(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})$，其中 $x\in R$；$G(x)=\Phi(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2})$，其中 $y\in R$；

则TRV变量 (X,Y) 的JDF函数可描述为：

①当取式(10)右边时，(X,Y) 的JDF函数为：

$$C_1(u_1,u_2)=H(x,y)=\min\{\Phi(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}),\Phi(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})\}\text{；}\quad(11)$$

②当取式(10)左边时，(X,Y) 的JDF函数为：

$$C_2(u_1,u_2)=H(x,y)=\max\{\Phi(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})+\Phi(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})-1,0\}\text{；}\quad(12)$$

③当取TRV变量的JDF函数为正态Copula函数时，(X,Y) 的JDF函数为：

$$C_3(u_1,u_2)=H(x,y)=\Phi_\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})$$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}}\int_{-\infty}^{\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{s^2-2\rho st+t^2}{2(1-\rho^2)}}dsdt\text{；}\quad(13)$$

④当取TRV变量的JDF函数为 $t-Copula$ 时，(X,Y) 的JDF函数为：

$$C_4(u_1,u_2)=C^t_{\rho,\upsilon}(u,v)=H(x,y)=t(t_\upsilon^{-1}(x),t_\upsilon^{-1}(y))\text{；}$$

其中：t_v 为 t 分布函数，其自由度为 v，即：

$$t_\upsilon(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{\Gamma(^{(\upsilon+1)}/_2)}{\sqrt{\pi\upsilon}\,\Gamma(^{\upsilon}/_2)}(1+\frac{s^2}{\upsilon})^{-\frac{\upsilon+2}{2}}ds\quad\text{；}(14)$$

$t_{\rho,\upsilon},\rho\in[0,1]$ 是边缘为 t_υ 的二维JDF函数；则 $C_4(u_1,u_2)$ 可等价表示为：

$$C_4(u_1,u_2)=\int_{-\infty}^{t_\upsilon^{-1}(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})}\int_{-\infty}^{t_\upsilon^{-1}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}(1-\frac{2\rho st-s^2-t^2}{\upsilon(1-\rho^2)})^{-\frac{\upsilon+2}{2}}dsdt\text{。}(15)$$

由定义4可知，当TRV变量的MDF函数已知时，其JDF的类型不同，所构建的Copula函数是不一样的，因此，若变量的MDF函数已知时，其JDF函数不唯一。

4.2 多维Copula函数的构建与参数估计

由上定义4可知，变量间差别各异的相依特性可选择不同的Copula函数来描述。那么，在构建当多维随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的各个分量边缘分布已知情况下的联合分布函数时，应该如何选择适当的Copula函数模型是期待解决的问题，也是MRV变量的JDF函数Copula方法构建的必要步骤之一。

如何才能选择合适的Copula函数？依据文献[8]可知，选择Copula函数时，需要按照一定的方法来进行，且可对选择的Copula函数进行验证，以验证所选的Copula函数是否适合。但要应对多维随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，上述方法的过程极其复杂，不能方便而又简单地给定待选Copula函数的各种估计优度，因此，在此采用新的方法来确定和构建Copula函数。

定义5 若随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的MDF函数分别为 $F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2),\cdots,F_{X_n}(x_n)$，则存在JDF函数 $H(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 使得：

$$H(x_1,x_2,\cdots,x_n)=C(F_{X_1}(x_1),\cdots,F_{X_n}(x_n);\theta)\text{；}$$

其中 θ 为参数向量。

定义5给出了构建Copula函数的一种新的方法和思路。由定义5构建的Copula函数，还需要进行验证，以明确使用的是哪种具体的函数，并采用一定的方法来拟合Copula函数和估计、检验参数 θ。

定义6 若 c_θ 为 C_θ 的DF函数，MRV变量 $\{(X_{1t},\cdots,X_{nt}):t=1,\cdots,M\}$ 取自于JDF函数

$$H_\theta(x_1,\cdots,x_n)=C_\theta(F_1(x_1),\cdots,F_n(x_n)),$$

则作函数

$$L(\theta)=\sum_{t=1}^{M}\log[c_\theta(\hat{F}_{1M}(X_{1m}),\cdots,\hat{F}_{nM}(X_{nm}))]\quad,(14)$$

选择 $\hat{\theta}$ 使 $L(\theta)$ 的值取最大；其中：$\hat{F}_{iM}$ 为第 i 个随机变量的MDF函数。

因此，参数 θ 的估计值为：

$$\hat{\theta}=ArgMax\{L(\theta)\}\text{。}(15)$$

当Copula函数构建完成并对其参数θ进行了估计后,必须检验所使用的Copula函数族是否合适;否则,重新进行构建和参数估计。

定义7 若令$U_i=F_{X_i}(x_i),i=1,2,\cdots,n$,即有$U_i$均服从[0,1]的均匀分布;设随机变量

$V=C(U_1,\cdots,U_n;\theta)$,

则随机变量V必然存在分布函数$K(v;\theta)$和概率密度函数$k(v;\theta)$。

定义8 若存在MRV变量的Copula函数分布函数,则必然存在一个$K(v;\theta)$与之对应。

利用前面定义,可得到ACF函数族与$K(v;\theta)$是一一对应,其生成元用ϕ予以表示;若为非ACF函数族,同样存在$K(v;\theta)$与其一一对应。由此表1的ACF函数,其对应的表达式分别为:

Gumbel $n-Copula$: $C(u_1,\cdots,u_n)=\exp(-(\sum_{i=1}^{n}(-\log u_i)^{1/\theta})^{\theta})$;

Frank $n-Copula$: $C(u_1,\cdots,u_n)=-\frac{1}{\theta}\log(1-\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-e^{-\theta u_i})}{1-\epsilon^{-\theta}})$;

Clayton $n-Copula$: $C(u_1,\cdots,u_n)=(\sum_{i=1}^{n}u_i^{-\theta}-n+1)^{-\frac{1}{\theta}}$。

因此,可以利用上面的定义,将多维随机向量的联合分布转换为一元函数予以求解,简化了求解步骤和方法,使多维随机向量间的相依特性更好地通过$K(v;\theta)$予以描述。

在已知MRV变量的MDF函数的情况下,构建其联合Copula函数时,需检验Copula函数是否属于某一确定的Copula函数,且此时参数θ为已知[9]。

当$\theta=\theta_0$时,待检验问题描述为:

$H_0: C(u_1,\cdots,u_n)=C_0(u_1,\cdots,u_n;\theta)$;

$H_1: C(u_1,\cdots,u_n;\theta)\neq C_0(u_1,\cdots u_n;\theta_0)$。

由定义7、8可知,Copula函数与$K(v;\theta)$一一对应,故假设成立,即:

$H_0^1: k(v;\theta)=k(v;\theta_0)$;

$H_1^1: k(v;\theta)\neq k(v;\theta_0)$。

定理3 若随机样本$X_{1j},X_{2j},\cdots,X_{nj},j=1,\cdots,m$,由其MDF得到:

$U_{ia}=F_{X_i}(X_{ia}),i=1,\cdots n,\ j=1,\cdots,m$;

随机变量V的样本是$V_1,\cdots V_m$,其中$V_j=C_0(U_{1j},\cdots,U_{nj};\theta_0)$,$j=1,\cdots m$。将$V$的分布函数$K(v;\theta)$的定义域[0,1]划分为$r$个小区间,即$0=b_0<b_1<\cdots<b_{r-1}<b_r=1$,则

$$T_n=\sum_{k=1}^{r}\frac{(n_k-nP_k)^2}{nP_k}\sim\chi^2(r-1)$$

其中:$n_k=\{j:b_{k-1}<V_j\le b_k\},P_k=K(b_k;\theta_0)-K(b_{k-1};\theta_0),k=1,2,\cdots,r$。

选取r适当时,用χ^2分布验证是合适的,即r的选取既要抱着有相当的区间用于模型拟合度的评价,又要确保各区间有足够的观测值;此时的样本容量需满足:

① $n\ge10,r\ge3,n/r\ge10$;

② $nP_k\ge1/4,k=1,2,\cdots,r$。

若存在多个小区间$nP_k<1/4$,则需对其进行合并。在α确定时,若T_n的观测值满足:

$t_n>\chi^2_\alpha(r-1)$,

则拒绝假设 $H_1^1: k(v;\theta)\neq k(v;\theta_0)$,从而拒绝$H_0^1: k(v;\theta)=k(v;\theta_0)$若假设被拒绝,则需重新构建Copula函数,并做估计,然后再检验拟合度。

5 结论

在实际应用中,如文献[4]将Copula函数理论应用于系统可靠性研究,存在MRV变量的MDF函数已知时,需要构建其JDF函数来研究变量间的相依特性。因此,本文从MRV变量的MDF函数与其JDF函数的关系出发,研究如何构建Copula函数,并对构建的函数进行拟合与检验。首先,简单介绍Copula函数的定义、SKlar定理和常用的函数类型;然后将TRV变量的MDF函数与其JDF函数的关系扩展到MRV变量;最后研究了TRV变量的MDF函数已经时,构建其JDF函数的方法,同时将其扩展到MRV变量,提出了新的构建MRV变量的JDF函数的方法,对构建的函数提出了相应的拟合方法和参数估计方法。

注释及参考文献:

[1]高世泽.概率统计引论[M]. 重庆:重庆大学出版社,2000:65-100.

[2]Roger B Nelsen, Jose Juan Quesada-Molna, et al.. Distribution functions of copulas: a class of bivariate probability integral transforms[J].Statistics and Probability lettera,54(2001):277-282.

[3]Sklar A. Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges[M]. Publ Inst Statist Univ Paris,1959,8 :229-231.

[4]郭荣佐,黄君.嵌入式实时控制系统软件可靠性建模与应用[J].计算机应用,2013, 33(2):575-578.

[5]唐家银,何平,李裕奇,等.故障相关的表决可修系统可用度计算[J].数学的实践与认识,2013,43(1):108-117.

[6]牟鹏博,陶凤和,贾长治, 等.基于Copula函数模型的机械传动装置可靠性分析[J].机械设计与研究,2013,29(3):32-34.

[7]梁冯珍,钟君,史道济.尾部相关性对投资组合VaR的影响分析[J].系统工程理论与实践,2007(7):64-68.

[8]吴娟,刘次华,邱小霞,等.多元Copula参数模型的选择.武汉大学学报(理学版),2008, 54(3): 267-270.

(下转37页)

Development and Design of University Physical Design Experiments

JIANG Zhi-nian

(*Department of Physics and Electronic Engineering, Guangxi Normal University for Nationalites, Chongzuo, Guangxi 532200*)

Abstract: University physics experiment course is a compusory basic experiment course of college students, however, the traditional physical experiment teaching always ignores the cultivation of students innovation ability and practice ability. The topic selection principle of design experiments, teaching requirements and teaching methods are expounded in the first part of the article,and a typical example about design experiment is enumerated for analysis in the middle of the article,and some suggestions on design experiment are proposed at the end of the artcle. It is obvious that the design physics experiment is helpful to improve the students' ability of innovation.

Key words: design experiments; teaching ; the ability of innovation

(上接25页)

[9]Chiming Guo, Wenbin Wang,etc.. Maintenance Optimization for Systems With Dependent Competing Risks Using a Co pula Function[J]. Eksploatacja i Niezawodnosc-Maintenance and Reliability 2013; 15 (1): 9-17.

Constructing Multiple Copulas Function under the Marginal Distribution Determined

HUANG Jun

(*Department of Basic Courses, Sichuan Technology & Business College, Dujiangyan, Sichuan 611830*)

Abstract: Based on the relationship between the marginal distribution function(MDF) and the joint distribution function(JDF) of the two-dimensional random variable(TRV), this paper concerns how to build the JDF of multidimensional random variables (MRV) copula function, and for the construction of function fitting and inspection. First, it introduces the definition of Copula function, the types of SKlar theorem and commonly used functions of the Copula Function. Then the relationship between the MDF function and JDF function of TRV variables is extended to MRV variables. Finally this paper studies the building JDF-function method under the MDF-function already of the TRV- variables, and the method extend to the MRV variables. It also puts forward the new method of constructing JDF function of MRV variables, and the corresponding methods of fitting and parameter estimation of the function constructed.

Key words: Copulas function; marginal distribution; multivariate random vector; joint distribution function.