极限的若干计算方法研究*

徐建中
(亳州师范高等专科学校,安徽 亳州 236800)

【摘 要】极限理论是高等数学中的重要基础,求极限贯穿于高等数学的始终,其方法多种多样,本文着重介绍了利用导数定义、拉格朗日中值定理、等价无穷小代换、泰勒公式、施笃兹定理定积分定义、级数收敛必要条件等几种不同的求极限方法,并通过实例加以说明。

【关键词】极限;函数;数列;高等数学
【中图分类号】O171 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2014)02-0019-03

极限是研究高等数学的基本工具,高等数学中的许多概念都要用极限来描述,它是最为重要的基本概念之一,掌握极限的运算方法对于学好高等数学起着至关重要的作用,这里介绍几种计算极限的特殊方法,并通过例子加以说明。

1 利用导数定义

定义1:设函数$y=f(x)$在x_0的领域$U(x_0)$内有定义,在x_0自变数x的改变量为Δx,相应函数值的改变量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,若极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在,则称函数$y=f(x)$在$x_0$处可导,此极限为函数$f(x)$在$x_0$的导数,即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{。}$$

例1:计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1),a>0$。

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^0}{\frac{1}{n}}=(a^x)'|_{x=0}=\ln a$

例2:计算 $\lim\limits_{x\to\infty}x[\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})]$

解 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}3\dfrac{\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln 1}{\frac{3}{x}}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\ln(1+\frac{1}{x})-\sin\ln 1}{\frac{1}{x}}$

$=3(\sin\ln t)'|_{t=1}-(\sin\ln t)'|_{t=1}$

$=2\frac{1}{t}\cos\ln t|_{t=1}=2$

2 利用拉格朗日中值定理

定理1(拉格朗日中值定理):若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续,在开区间(a,b)内可导,则存在一点$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

例3:计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\varepsilon}=1$ $\varepsilon\in(x,\tan x)$

例4:计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$ $a\neq b$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{ax-bx}\cdot\dfrac{ax-bx}{\sin ax-\sin bx}$

$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\varepsilon_1}\cdot\dfrac{1}{\cos\varepsilon_2}$ ε_1、$\varepsilon_2\in(ax,bx)$

3 利用等价无穷小代换

定义2:设函数$f(x)$和$g(x)$($x\to a$)都是无穷小,且当$x\neq a$时,$g(x)\neq 0$,若$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$时。则称$f(x)$与$g(x)$是等价无穷小,表示为:$f(x)\cup g(x)$ $(x\to a)$。

例5:计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x^2}-1}{\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}}$

解:由等价公式知,原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{n}}{\ln(1+x^2)-\ln(1-x^2)}$

$=\dfrac{1}{n}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{(1+x^2)-(1-x^2)}=\dfrac{1}{n}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2n}$。

例6:计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(xe^{x^2})-\sin(x^2e^{-x})}{\tan(\sin 2x)-\tan(\sin x)}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{x^2}-x^2e^{-x}}{\sin 2x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^{x^2}-xe^{-x})}{2x-x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(e^{x^2}-xe^{-x})$

4 利用泰勒公式

收稿日期:2013-12-15
*基金项目:国家自然科学基金项目(项目编号:10771001);安徽省教育厅自然科学基金项目(项目编号:KJ2013B153,KJ2013Z258);安徽省教学研究项目(项目编号:2012jyxm595);数学教育省级特色专业(项目编号:20101184);亳州师专科研项目(项目编号:BSKY201111, BSKY201113,BSKY201211)专项资金资助。
作者简介:徐建中(1979-),男,安徽庐江人,讲师,硕士,主要从事微分方程方面的研究。

定义3：设函数 $f(x)$ 在 x_0 处存在 n 阶导数，则有：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)(x\to x_0)$$

称为函数 $f(x)$ 在 x_0 的泰勒级数，表示为：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

例7：计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin x^2-\tan^2 x}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}(-\frac{x^2}{2})^2+o(x^4)]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}$$

$$=-\frac{1}{12}$$

例8：计算 $\lim\limits_{x\to\infty}n[e-(1+\frac{1}{n})^n]$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}n[e-e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}]$

$$=\lim_{n\to\infty}n[e-e^{n[n-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})]}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}n[e-e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}n[e-e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}]$$

$$=-\lim_{n\to\infty}ne[e^{-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}-1]$$

$$=-\lim_{n\to\infty}ne[-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})]$$

$$=\frac{e}{2}$$

5 利用施笃兹(Stloz)定理

定理2(Stloz定理)：设 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$，且 y_n 从某一项开始严格单调增加，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$（有限或为 $+\infty,-\infty$），则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$

例9、计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{(n+1)!-n!}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$$

$$=1$$

例10、计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{n-(n-1)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

6 利用定积分定义

定义4：设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 $[a,b]$ 上插入若干个点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，将区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[a,x_0],[x_1,x_2],[x_2,x_3],\cdots,[x_{n-1},x_n]$，各小区间的长度依次记为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,3\cdots,n)$，在每一个小区间上任取一点 $\xi_i(x_{i-1}<\xi_i<x_i)$，作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i\ (i=1,2,3\cdots,n)$，并作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$。记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，如果不论对区间[a,b]怎样分法，也不论在小区间 $[x_i,x_{i-1}]$ 上点 ξ_i 怎样取法，只要 $\lambda\to 0$ 时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 总趋于确定的值I,则称 $f(x)$ 在[a,b]上可积，称此极限值I为函数 $f(x)$ 在[a,b]上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$，即 $I=\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$。

例11、计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}+\dfrac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}$$

令 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$0\le x\le 1$，由定积分定义知

$$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}$$

∴原式 $=1n2$

例12、计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$

解 取对数后原式变为：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})=\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1,$$

$$\therefore 原式=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}$$

7 利用级数收敛必要条件

定理3:若级数u_n收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。

例13、计算$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0(a>1)$

解:令$b_n=\frac{(2n)!}{a^{n!}}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{a^{n!n}}=0$,由正项级数收敛的达朗贝尔判别法,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}$收敛,再由级数收敛的必要条件知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0$

例14、计算$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2})$

解 $\because$ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛。$\forall\varepsilon>0,\exists n>N$时,有

$$\left|\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}\right|<\varepsilon \text{ 即:} \frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}<\varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2})=0$$

高等数学中求极限的计算方法有很多,但每种方法都有一定的局限性,在具体的解题过程中要具体问题具体对待,只有灵活运用各种方法,才能更好的应用到解题中去。本文主要总结了几种求极限的方法,具体的方法有很多种,其实求极限的过程就是综合灵活运用各种方法的过程,只有真正的掌握各种方法之间的内在联系,才能运用自如。

注释及参考文献:

[1]同济大学数学系.微积分[M].北京:高等教育出版社,1999.
[2]华东师范大学数学系.数学分析[M].北京:高等教育出版社,2001.
[3]钱吉林.数学分析题解精粹[M].武汉:崇文书局,2003.
[4]刘三阳.数学分析十讲[M].北京:科学出版社,2011.
[5]张从军.数学分析概要二十讲[M].合肥:安徽大学出版社,2000.
[6]张学军.数学分析选讲[M].长沙:湖南师范大学出版社,2012.
[7]裴礼文.数学分析中的典型问题与方法[M].北京:高等教育出版社,2006.
[8]刘玉琏.数学分析[M].北京:高等教育出版社,1999.

Research on Calculation Method of Limit

XU Jian-zhong
(Department of Mathematics, Bozhou Teachers College, Bozhou, Anhui 236800)

Abstract: Limit theory is an important basis in higher mathematics, limit is always running through the work of the higher mathematics, and its methods are diverse. This paper emphatically introduces the different methods of several kinds of limit by using the definition of derivative, the Lagrange mean value theorem, equivalent infinitesimal substitution, Taylor formula, Stloz theorem, the definition of definite integral, the necessary conditions of the series convergence, and is illustrated by examples.

Key words: limit; function; sequence; higher mathematics