含参数不等式解法初探*

吴恒飞,张宗标
(亳州师范高等专科学校 理化系,安徽 亳州 236800)

【摘　要】含参数不等式的解法问题是中学数学教学讨论的热点话题,本文结合中学现行教材,对含参数不等式,介绍几种常用解法——分类讨论法,分离参数,构造函数法,数形结合法,函数值域法,在对上述几种数学解题思想分别讨论的基础上进行科学的归纳、总结,并提出一些规律性认识和见解。

【关键词】不等式;参数;常用解法
【中图分类号】G633.6　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2013)02-0031-03

引言

不等式是数学基础理论课的重要组成部分,它刻画了事物在数量上的不等关系,不等式也是中学数学的重要内容,与其他各部分知识点有着密切的关系,而含参数不等式问题在高考中经常出现,要顺利解含参数的不等式,三角不等式,均值不等式,函数图像与性质等知识需要综合应用,同时还要具有一些重要的数学思想,如:分类讨论,数形结合,构造函数等。因此含参数不等式的解法是教师教学的难点,也是学生学习的难点,本文对含参数不等式的解法介绍几种常用的方法,以期对老师的教学和学生的学习有所借鉴。下面逐一介绍:

1 分类讨论法

分类讨论法是解含参数不等式最基本的方法,含参数不等式大多数情况下都是通过这种方法解决的。分类讨论是一种逻辑方法,注重逻辑的严密性,同时分类讨论也是一种数学思想,应用此思想方法解题时,对参数的讨论要不重复、不遗漏和最简化。因此分类讨论思想具有很强的逻辑性、综合性和探索性,既能锻炼学生的思维能力又能锻炼学生的概括能力。

例1、$\frac{x^2+x-6}{2m+1}>x+6(2m-1)$(m是参数,m≠0),

解:原不等式整理后得:$\frac{(x+4m)(x-6m)}{2m+1}>0$

当$m>-\frac{1}{2}$时,原不等式等价于(x+4m)(x-6m)>0……①,分三种情况:

(1)当m>0时:有-4m<6m,由①解:x>6m或x<-4m,

(2)当m=0时:原不等式可化为:$x^2>0$,由①得:x≠0,

(3)当$-\frac{1}{2}<m<0$时:有-4m>6m,由①得:x>-4或x<6m,

当$m<-\frac{1}{2}$时:原不等式等价于(x+4m)(x-6m)<0,因为$m<-\frac{1}{2}$,

所以-4m>6m,解得:6m<x<-4m,

评注:本题中因为m的符号影响到了2m+1的符号及两根-4m、6m的大小,所以要对m>0、m=0、$-\frac{1}{2}<m<0$、$m<-\frac{1}{2}$分别讨论,通过上面几种对m的全面讨论,讨论的结果就不会出现遗漏现象,这正反映了分类讨论思想的严密性。

2 分离参数法

分离参数法是解决一般的不等式恒成立问题的常用方法。分离参数就是将参数与其他变量分开到不等式两边,再通过求函数值的方法解题,因此所求不等式中至少有两个变量,这种数学思想与分类讨论思想听起来相似,但它们却是两种不同的数学方法,有着根本的区别。下面通过例题说明这种方法。

例2.已知$2^{(x+1)}\le 2^{(2x+t)^2}$(t是参数,t∈R)当0≤x≤1时恒成立,求t的取值范围。

分析:题中有x与t两个变量,由题意得:当0≤x≤1时,$2^{(x+1)}\le 2^{(2x+t)^2}$两边取对数再把x与t分别置于不等式的两边,得$t\ge -2x+\sqrt{x+1}$,要使不等式恒成立,只要t不小于$G(x)=-2x+\sqrt{x+1}$(0≤x≤1)的最大值即可,这样就把问题转化为求最值问题。

解:因为$2^{(x+1)}\le 2^{(2x+t)^2}$,0≤x≤1,

所以$2x+t\ge\sqrt{x+1}$即:$t\ge -2x+\sqrt{x+1}$,0≤x≤1,

设$y=\sqrt{x+1}$,由0≤x≤1得:$y\in[1,\sqrt{2}]$,

收稿日期:2013-05-08
*基金项目:安徽省教育厅自然科学基金(项目编号:KJ2011Z258);安徽省省级特色专业(数学教育),中央财政支持专业(数学教育);亳州师专校级课题(项目编号:BSJY201205)。
作者简介:吴恒飞(1984-),男,安徽亳州人,硕士研究生,研究方向:数学教育。

则 $-2x+\sqrt{x+1}=-2y^2+y+2$，即 $t\geq -2y^2+y+2$，当 $1\leq y\leq\sqrt{2}$ 时恒成立，

因为 $F(y)=-2y^2+y+2$ 在区间 $[1,\sqrt{2}]$ 上的最大值为 $F(1)=1$，

所以 t≥1 有 $2^{(x+1)}\leq 2^{(2x+t)^2}$ 在 0≤x≤1 时恒成立。

评注：可以看出分离参数法是解决含参数不等式恒成立问题的常用的一种方法，本例题解法体现了这类问题的常规性，这种方法不仅适用于函数问题，对于数列问题也有一定的适用价值。

3 构造函数法

构造函数法是求解含参数不等式的一种重要的思想，这种思想方法在一般情况下，是构造出参数变量的一次函数或二次函数，利用一次函数、二次函数的单调性、奇偶性等性质讨论问题，通过这种方法，可以使一些不等式证明问题及不等式恒成立问题迎刃而解。

例3.设 $a\in R$，函数 $f(x)=ax^2+x-a(-1\leq x\leq 1)$，若 $|a|\leq 1$，求证：$|f(x)|\leq\frac{5}{4}$。

证明：构造以a为变量，以x为参量的函数，分类讨论x，

可设 $g(a)=(x^2-1)a+x$，因为 $-1\leq x\leq 1$，即 $-1\leq x^2-1\leq 0$，

（1）当 $x^2-1=0$ 即 $x=\pm 1$ 时，$g(a)=x=\pm 1$ 结论成立，

（2）当 $-1\leq x^2-1<0$ 时，g(a)是关于a的一次函数，

所以 $g(1)\leq g(a)\leq g(-1)$，

$$g(1)=x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4},\ g(-1)=-x^2+x+1=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4},$$

所以在 $x\in[-1,1]$ 上，$-\frac{5}{4}\leq g(1)\leq 1$，$1\leq g(-1)\leq\frac{5}{4}$，

所以 $-\frac{5}{4}\leq g(1)\leq g(a)\leq g(-1)\leq\frac{5}{4}$，

即 $|g(a)|\leq\frac{5}{4}$，$|f(x)|\leq\frac{5}{4}$。

评注：本题是一题含参数的二次函数求取值范围的问题，先构造出以a为变量，以x为参量的一次函数g(a)，在对x进行分类讨论，其中讨论的第二步充分利用函数的单调性再综合一些解题技巧便容易得到结果。

4 数形结合法

数形结合法是把抽象思维转化成形象思维，把代数问题转化成更为直观、生动的几何图形、图像的问题，利用几何知识找到更便捷的解题途径，避免复杂的计算。

例4.解不等式 $|x+a|+|x|<2$，其中a是参数。

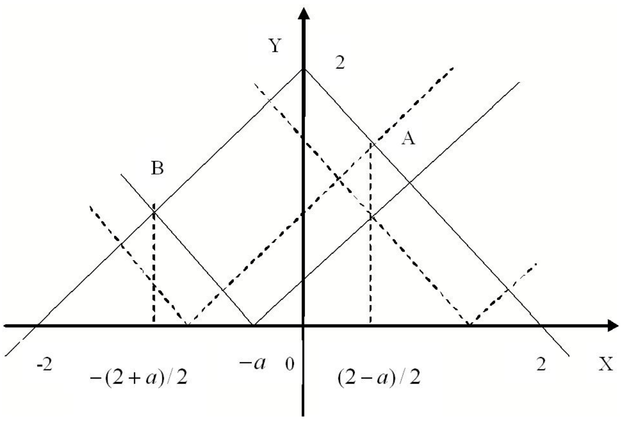
解：把原不等式变形为 $|x+a|<2-|x|$

作平面坐标系，分别作函数 $y=|x+a|$……①和 $y=2-|x|$……②的图像，

①是以斜率为±1，端点为(-a,0)向上的两条射线，②是以斜率为±1，端点为(0,2)向下的两条射线，如下图。容易求得两函数的交点为：

$$x_A=\frac{2-a}{2},\quad x_B=-\frac{2+a}{2}$$

由图可知，当a≤-2或a≥2时，原不等式无解，当-2≤a≤2时，原不等式的解为：$-\frac{2+a}{2}<x<\frac{2-a}{2}$



5 函数值域法

函数值域法是利用在给定的区间上的函数值域，确定参数或未知数的代数式取值范围，或由已知条件估计参数的范围，然后再求不等式。解题过程中往往通过函数值域的范围，由一边的范围推知另一边的范围，从而缩小了参数或未知数的取值范围，达到了简化参数的目的，此种方法看似简单，其作用不可小视。下面通过例题来说明这种方法。

例5.解不等式 $\sqrt{x^2+1}-ax\leq 1$（a>0，a是参数），

解：把原不等式变形为：$\sqrt{x^2+1}\leq ax+1$

设 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$，由于此函数的值域是[1，+∞)所以1+ax≥1，即ax≥0，

所以原不等式等价于

$$\begin{cases}x\geq 0\\ x^2+1\leq(1+ax)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ (a^2-1)x+2a\geq 0\end{cases}$$

所以当0<a<1时，原不等式的解为：$0\leq x\leq\frac{2a}{1-a^2}$，

当a≥x时，原不等式的解集为：x≥0。

评注：此题若按常规解法，分类讨论相当繁琐，若按本题解法先确定不等式左边 $\sqrt{x^2+1}\in[1,+\infty)$ 推出ax+1≥1，从而推出x≥0，缩小了未知数x的范围，简化了解题难度。

通过以上几种解题方法及几个例题，可以看出

含参数不等式是一类综合性较强的题目,无论是什么样的含参数不等式,在解题之前要先弄清楚不等式的类型,以此选择适当的方法,使解题具有明确的方向。若我们平时学习能建立这些解题模式,今后再遇到类似这样的新问题,以此为引索,确定解题方法,便能够应对自如。

注释及参考文献:

[1]全良.一类题的解法的探索与研究[J].中学数学教学,2003(6):47-47.
[2]蔡勇全.确定恒成立不等式中参数范围的九种策略[J].数理化学习(高中版),2011(6):26-28.
[3]查志刚.谈恒成立问题的求解方法探讨[J].数学通报,2003(6):25-27.
[4]侯绪刚,童嘉森.不等式恒成立中参数范围的确定[J].高中数理化,2011(17):11-12.
[5]肖家礼.解含参数的不等式常用的几种方法[J].玉溪师范学院学报,2001(17):320-321.

Exploration about the Solving Method of the Inequality with Parameter

WU Heng-fei,ZHANG Zong-biao
(Department of Chemical and Physical,Bozhou Teachers College,Bozhou,Anhui 236800)

Abstract: The solving method of inequality with parameter is the hot topic in the mathematics teaching in middle school. In this article,we introduced several common used solving methods of inequality with parameter——the classified discussion method, separating parameter method, constructing function method, combining number and form method, the function range method. We scientifically summarized the mathematical thoughts above, and put forward some regular understandings and opinions.

Key words: Inequality;Parameter;Common used methods

(上接30页)

[2]魏献祝编.高等代数[M].修订版.上海:华东师范大学出版社,1999.
[3]北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组.高等代数[M].第三版.北京高等教育出版社,2000.
[4]陈祖明.矩阵论引论[M].北京:北京航空航天大学出版社,2003.
[5]杨富云等编.高等代数辅导及习题全解[M].北京:人明日报出版社,2004.
[6]黎伯堂 刘桂真编.高等代数解题技巧与方法[M].济南:山东科学技术出版社,2003.7.
[7]秦松喜编.高等代数新编[M].厦门:厦门大学出版社,2005.
[8]王志武.方阵可对角化的一个充要条件[J].山东农业大学学报.2008(4):641-642.

Talk about the Problem of Matrix Diagonalization

JU Peng-yue
(College of Mathematics and Statistics,Longdong University,Qingyang,Gansu 745000)

Abstract: The problem of matrix diagonalization is a complex, and difficult one to estimate. In this paper, starting from the definition of matrix diagonalization, according to the analysis of special conditions, which is the matrices satisfy,we have derived the conditions that a diagonal matrix satisfies.

Key words: Matrix;Diagonalization;Eigenvalue;Invertable matrix