浅谈特殊矩阵的对角化问题

俱鹏岳
(陇东学院 数学与统计学院,甘肃 庆阳 745000)

【摘 要】矩阵的对角化问题比较复杂,难以判断,文章从可对角化的定义出发,根据对满足特殊条件的矩阵进行分析讨论,得出其能否对角化的相应条件。

【关键词】矩阵;对角化;本真值;可逆矩阵
【中图分类号】O151.21 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2013)02-0029-02

引言

矩阵是高等代数的重要内容之一,是许多数学分支研究的重要工具,而对角矩阵形式简单,研究起来比较方便,用途广泛,因此,对矩阵能否对角化的研究显得尤为重要。文献[1]和[2]中已给出了矩阵能否对角化相关判别方法,这里不再一一列举。这里,对部分特殊矩阵能否对角化问题进行详细的讨论,得出其能否对角化的相应条件。

1 主要结论

定理1 若n阶可逆矩阵A可以对角化,那么A^{-1}和A^*都可以对角化。

证明:由于A可以对角化,所以存在n阶可逆矩阵T,使得

$$(1)\ T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

又因为A可逆,则每个λ_i都不等于0,对(1)两端取逆,

有$T^{-1}A^{-1}T=\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{-1}\end{pmatrix}$,故$A^{-1}$也可以对角化;

再因为$A^*=|A|A^{-1}$,

则$T^{-1}A^*T=|A|T^{-1}A^{-1}T=\begin{pmatrix}\frac{|A|}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{|A|}{\lambda_n}\end{pmatrix}$,故$A^*$也可以对角化。

注释1在可以对角化的前提下,存在的可逆矩阵T都相同。

定理2 阶幂等矩阵可以对角化。

证明:由于A是幂等矩阵,即$A^2=A$,所以A的本真值只能是0或1。设r(A)=r,

当r=n时,A是可逆矩阵,即A=I,因此A可以对角化;当r=0时,A=O,因此A可以对角化;当0<r<n时,当本真值$\lambda_1=0$时,则属于$\lambda_1=0$的本真向量是齐次线性方程组$(\lambda_1 I-A)X=0$的基础解系,从而就有n-r个线性无关的本真向量。当本真值$\lambda_2=1$时,则属于$\lambda_2=1$的本真向量是齐次线性方程组$(\lambda_2 I-A)X=0$的基础解系,而$A^2=A\Rightarrow A(I-A)=O$,得到$r(I-A)+r(A)\leqslant n$,则$r(I-A)\leqslant n-r$;另一方面,$r(A)+r(I-A)\geqslant r(A+I-A)=r(I)=n$,则$r(I-A)\geqslant n-r$,因此$r(I-A)=n-r$,从而就有r个线性无关的本真向量,所以A有n个线性无关的本真向量,因此A可以对角化。

注释2可以找到一个可逆矩阵T,使得

$$T^{-1}AT=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$$

因此该定理另一种叙述方式为:幂等矩阵一定相似于Λ。

推论1设A、B都是幂等矩阵,且AB=BA,则A、B可以同时对角化,即存在n阶可逆矩阵P,使得

$P^{-1}AP=P^{-1}BP=\Lambda$

证明:由定理2可知,存在n阶可逆矩阵T,使得

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$$

取$C=T^{-1}BT$,由于AB=BA,得到

$$C\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}=(T^{-1}BT)(T^{-1}AT)=T^{-1}BAT=T^{-1}ABT$$

$$=(T^{-1}AT)(T^{-1}BT)=\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}C\ \text{(r是A的秩)}$$

令$C=\begin{pmatrix}B_1 & \\ & B_2\end{pmatrix}$($B_1$是r阶,$B_2$是n-r阶),由于$B^2=B$,得到$C^2=C$,从而$B_1^2=B_1$,$B_2^2=B_2$,也就是说$B_1$,$B_2$都是幂等矩阵,由定理2可知,存在r阶可逆矩阵$T_1$和n-r阶可逆矩阵$T_2$,使得

收稿日期:2013-05-07
作者简介:俱鹏岳(1975-),男,甘肃镇原县人,副教授,本科,主要从事基础数学的教学与研究。

$$T_1^{-1}B_1T_1=\begin{pmatrix}I_s&\\&0\end{pmatrix},T_2^{-1}B_2T_2=\begin{pmatrix}I_t&\\&0\end{pmatrix}$$

令 $P=TQ,Q=\begin{pmatrix}T_1&\\&T_2\end{pmatrix}$,则

$$P^{-1}AP=(TQ)^{-1}A(TQ)=Q^{-1}(T^{-1}AT)Q=\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}$$,且

$$P^{-1}BP=(TQ)^{-1}B(TQ)=Q^{-1}(T^{-1}BT)Q=Q^{-1}CQ$$

$$=\begin{pmatrix}T_1^{-1}B_1T_1&\\&T_2^{-1}B_2T_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_s&&&\\&0&&\\&&I_t&\\&&&0\end{pmatrix}$$

定理3　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是下三角矩阵,则

①若 a_{ii}(i=1,2,…,n)互不相等时,A可以对角化;

②若 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$,且有 $a_{ij}\neq0(i>j)$,则A不能对角化。

证明:①由于A是下三角矩阵,其主对角线上的元素 a_{ij} 是A的所有本真值,又因为 a_{ii}(i=1,2,…,n)互不相等,所以A有n个不同的本真值,故A可以对角化;

②反设A可以对角化,由于 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$,所以A的所有本真值就是 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$,则A相似于数量矩阵 $a_{11}I$,即存在n阶可逆矩阵P,使得

$A=P^{-1}(a_{11}I)P=a_{11}I$

这与 $a_{ij}\neq0(i>j)$ 矛盾,因此A不能对角化。

注释3从证明中可以看到数量矩阵只能与自身相似。

注释4对上三角矩阵也有类似的结论。

注释5定理的条件只是充分条件,不满足条件的矩阵能否对角化,还需要针对具体问题具体讨论。

如 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 就不能对角化。

定理4　设A是数域F上的n阶矩阵,对∀a、b∈F,a≠b,若 $A^2+(a+b)A+abI=0$,则A可以对角化。

证明:由于 $A^2+(a+b)A+abI=0$,得到(A+aI)(A+bI)=(A+bI)(A+aI)=0,这就说明A+bI的列向量都是齐次线性方程组(A+aI)X=0的解,因而

$r(A+aI)+r(A+bI)\leqslant n$

另一方面,由于A+aI-(A+bI)=(a-b)I,所以

$r(A+aI)+r(A+bI)\geqslant r((a+b)I)=n$,

因此r(A+aI)+r(A+bI)=n,为方便起见,不妨设r(A+aI)=k,r(A+bI)=l,并且有k+l=n,取 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_l$,是A+bI列向量组的极大无关组,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_l$,是A的属于本真值-a的全部线性无关的本真向量;同理,A+aI列向量组的极大无关组 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_k$,是A的属于本真值-b的全部线性无关的本真向量;又因为a≠b,所以

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$

是A的性无关的本真向量。因此A就有n个线性无关的本真向量,故A可以对角化。

注释6从定理的证明过程看到,取可逆矩阵 $T=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)$,则

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}-a&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&-a&&&\\&&&-b&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-b\end{pmatrix}$$

定理5　设A是n阶正定矩阵,B是n阶实对称矩阵,则AB和BA都可以对角化。

证明:由于A是n阶正定矩阵,则存在n阶可逆矩阵T,使得A=TT',于是有

$T^{-1}ABT=T^{-1}(TT')BT=T'BT$

所以 $T^{-1}ABT$ 是实对称矩阵,因而 $T^{-1}ABT$ 可以对角化,即存在可逆矩阵 T_1,使得 $T_1^{-1}(T^{-1}ABT)T_1=(TT_1)^{-1}AB(TT_1)$ 为对角矩阵,因此AB可以对角化;

又因为 $T'BA(T')^{-1}=T'B(TT')(T')^{-1}=T'BT$,B是n阶实对称矩阵,所以 $T'BA(T')^{-1}$ 是实对称矩阵,即存在可逆矩阵 T_2,使得 $T_2^{-1}(T'BA(T')^{-1})T_2=((T')^{-1}T_2)^{-1}BA((T')^{-1}T_2)$ 为对角矩阵,因此BA可以对角化。

2 应用举例

例　设 $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$,显然有(A-2E)(A-3E)=0,根据定理4得到A可以对角化。

3 结束语

由于数域F上的n阶矩阵构成的线性空间 $F^{n\times n}$ 和F上n维线性空间V上的线性变换构成的线性空间L(V)同构,因此文章所涉及的部分结论对线性变换同样成立;见于篇幅的关系,这里不再一一赘述。

注释及参考文献:

[1]张禾瑞,郝鈵新编.高等代数[M].第五版.上海:高等教育出版社,2007.3.

(下转33页)

含参数不等式是一类综合性较强的题目,无论是什么样的含参数不等式,在解题之前要先弄清楚不等式的类型,以此选择适当的方法,使解题具有明确的方向。若我们平时学习能建立这些解题模式,今后再遇到类似这样的新问题,以此为引索,确定解题方法,便能够应对自如。

注释及参考文献:

[1]金良.一类题的解法的探索与研究[J].中学数学教学,2003(6):47-47.
[2]蔡勇全.确定恒成立不等式中参数范围的九种策略[J].数理化学习(高中版),2011(6):26-28.
[3]查志刚.谈恒成立问题的求解方法探讨[J].数学通报,2003(6):25-27.
[4]侯绪刚,童嘉森.不等式恒成立中参数范围的确定[J].高中数理化,2011(17):11-12.
[5]肖家礼.解含参数的不等式常用的几种方法[J].玉溪师范学院学报,2001(17):320-321.

Exploration about the Solving Method of the Inequality with Parameter

WU Heng-fei,ZHANG Zong-biao
(Department of Chemical and Physical,Bozhou Teachers College,Bozhou,Anhui 236800)

Abstract: The solving method of inequality with parameter is the hot topic in the mathematics teaching in middle school. In this article,we introduced several common used solving methods of inequality with parameter—the classified discussion method,separating parameter method,constructing function method,combining number and form method,the function range method. We scientifically summarized the mathematical thoughts above,and put forward some regular understandings and opinions.

Key words: Inequality;Parameter;Common used methods

(上接30页)

[2]魏献祝编.高等代数[M].修订版.上海:华东师范大学出版社,1999.
[3]北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组.高等代数[M].第三版.北京高等教育出版社,2000.
[4]陈祖明.矩阵论引论[M].北京:北京航空航天大学出版社,2003.
[5]杨富云等编.高等代数辅导及习题全解[M].北京:人明日报出版社,2004.
[6]黎伯堂 刘桂真编.高等代数解题技巧与方法[M].济南:山东科学技术出版社,2003.7.
[7]秦松喜编.高等代数新编[M].厦门:厦门大学出版社,2005.
[8]王志武.方阵可对角化的一个充要条件[J].山东农业大学学报.2008(4):641-642.

Talk about the Problem of Matrix Diagonalization

JU Peng-yue
(College of Mathematics and Statistics,Longdong University,Qingyang,Gansu 745000)

Abstract: The problem of matrix diagonalization is a complex,and difficult one to estimate. In this paper,starting from the definition of matrix diagonalization,according to the analysis of special conditions,which is the matrices satisfy,we have derived the conditions that a diagonal matrix satisfies.

Key words: Matrix;Diagonalization;Eigenvalue;Invertable matrix