

一类对流占优奇异系数多孔介质方程的局部间断有限元方法研究

刘红霞¹, 徐娜²

(1. 东莞职业技术学院 公共教学部, 广东 东莞 523808;
2. 广州中国科学院先进技术研究所先进工业设计中心, 广东 广州 511458)

【摘要】本文研究求解一类对流占优奇异系数多孔介质方程的局部间断有限元方法, 给出了处理方程奇异系数的方法和详细的局部间断有限元格式。该方法通过适当改写原方程并引入对流通量以及扩散通量, 可以有效地抑制传统有限元方法求解对流占优问题在大梯度区域出现的数值伪震荡。数值实验表明该方法能有效求解对流占优奇异系数多孔介质方程。

【关键词】奇异系数; 局部间断有限元; 对流占优

【中图分类号】O241.8 **【文献标识码】**A **【文章编号】**1673-1891(2013)02-0023-03

1 引言

多孔介质方程在生物提纯、土壤污染物模拟、超滤传质等领域中有着广泛应用^[1]。对于单个球形多孔粒子而言, 该微分方程模型是具有奇异系数的对流扩散方程。另外在强的对流作用下, 该模型还具有对流占优的特点, 准确求解该方程有着非常重要的应用价值。

本文讨论以下无因次化线性二维多孔介质质量传递方程:

$$\varepsilon \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{y} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + v \frac{\partial c}{\partial x} \quad (1)$$

其中 c 表示浓度, v 表示对流系数, ε 表示孔隙率(不失一般性, 本文取为 1)。由于对称性, 方程(1)的求解区域 Ω 可取为单位圆的上半部分, 并在半圆弧部分施加齐次第一类边界条件:

$$\text{在 } \Gamma_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\} \text{ 上, } c(x, y, t) = 1 \quad (2)$$

在直径上, 由于对称性, 可以施加齐次 Neumann 边界条件:

$$\text{在 } \Gamma_2 = \{(x, y) | -1 < x < 1, y = 0\} \text{ 上, } \frac{\partial c(\bar{x}, t)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\text{初值条件取为下式: } c(x, y, t = 0) = 0 \quad (4)$$

在直径附近, 方程(1)中的系数 $1/y$ 趋向于无穷大, 即问题(1)是一个奇异系数问题。另外当 v 绝对值很大时, 方程(1)还具有对流占优的特点, 其数值求解备受关注。传统有限元方法处理对流占优问题在大梯度区域可能会出现数值震荡, 而间断有限元方法采用在单元交界面处允许间断的多项式空间作为试探空间, 如图 1 所示。该方法已经成功用于求解一阶双曲守恒问题^[2]。且通过适当改写方程为一阶方程组, 该方法已被推广到求解二阶扩散方程以及含更高阶空间导数的方程^[2,3]。

本文研究数值求解问题(1)~(4)的局部间断

有限元方法。

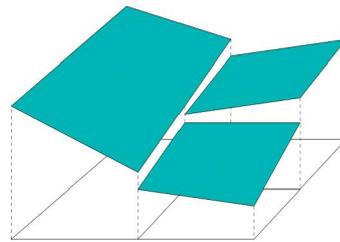


图1 间断有限元空间示例

2 主要结果

为方便叙述, 本文采用以下记号: 对求解区域 Ω 及其网格剖分 \mathcal{T}_h , 定义分片多项式空间

$$V_h = \{u \in L^2(\Omega) : u|_K \in P^k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (5)$$

如图 2 所示, 定义 $\{\{\cdot\}\}$ 与 $[[\cdot]]$ 为单元交界面处 $e = \partial K^+ \cap \partial K^-$ 任意一点的平均值以及跳跃量:

$$\begin{aligned} \{\{u\}\} &= (u^+ + u^-) / 2, \quad \{\{\bar{q}\}\} = (\bar{q}^+ + \bar{q}^-) / 2 \\ [[u]] &= u^+ \bar{n}^+ + u^- \bar{n}^-, \quad [[\bar{q}]] = \bar{q}^+ \cdot \bar{n}^+ + \bar{q}^- \cdot \bar{n}^- \end{aligned} \quad (6)$$

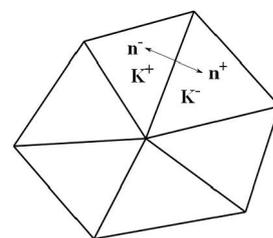


图2 间断有限元方法网格示例

为引入局部间断有限元格式, 引入中间变量

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad (7)$$

那么奇异系数方程(1)可以改写成以下与之等价的方程:

$$yu_t = u_y + yu_x + yu_{yy} - yv u_x = (yu)_x + (yu)_{yy} - yv u_x = (yp)_x + (yq)_{yy} - yv u_x \quad (8)$$

对方程(7)与(8)乘以检验函数并分部积分得到以下结果:

$$\int_K pr d\bar{x} = \int_{\partial K} \hat{u} n_1 ds - \int_K ur_x d\bar{x} \quad (9-1)$$

$$\int_K qr d\bar{x} = \int_{\partial K} \hat{u} n_2 ds - \int_K ur_y d\bar{x} \quad (9-2)$$

$$\int_K (yp)_x v d\bar{x} = \int_{\partial K} y \hat{p} n_1 ds - \int_K y p v_x d\bar{x} \quad (9-3)$$

$$\int_K (yq)_y v d\bar{x} = \int_{\partial K} y \hat{q} n_2 ds - \int_K y q v_y d\bar{x} \quad (9-4)$$

$$\int_K y u_i v d\bar{x} = \int_{\partial K} G(\vec{w}) \cdot \nabla v y d\bar{x} - \int_{\partial K} (\hat{F} + \hat{A}) v ds \quad (9-5)$$

其中 $\vec{w} = (u, p, q)^T$ 以及

$$G(\vec{w}) = \hat{F} - \begin{pmatrix} yp \\ yq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} yp \\ yq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v y u \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} yp \\ yq \end{pmatrix} \quad (9-6)$$

$$\hat{F}(a, b) \approx \hat{F} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} \{ (f_1(a) + f_1(b)) n_1 + (f_2(a) + f_2(b)) n_2 \} - \frac{\alpha}{2} (b - a) \quad (9-7)$$

$$\hat{A} \approx - \begin{pmatrix} yp \\ yq \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = - (\{ \{ yp \} \} n_1 + \{ \{ yq \} \} n_2) - \beta [\{ yp \}] - \gamma [\{ yq \}] \quad (9-8)$$

稳定化参数 α, β, γ 的取值分别如下: $\alpha > 0$ 是 c 位于 a 和 b 之间时 $f_1'(c) n_1 + f_2'(c) n_2$ 的最大绝对值; $\beta, \gamma \geq 0$ 取值可参考[2]。式(9-1)-(9-8)就是方程(1)的局部间断有限元格式。

3 数值实验

对采用局部间断有限元方法对问题(1)~(4)进行数值求解,其中对流速度 v 取不同的数值 $v = 500, 1000, 2000$ 和 4000 来测试方法的有效性以及稳定性,计算模拟的终止时刻都取为 $T_{end} = 1/v$ 。

图 3~图 10 给出了当对流速度分别为 $v = 500, 1000, 2000$ 和 4000 时,终止时刻为 $1/v$ 时的二维等值面图以及直径上的浓度分布。从这些图中可以明显看出随着 v 的增大,在直径上 $x=0$ 点附近的浓度梯度越来越大。即使是在对流占优的情况下,采用本文给出的局部间断有限元方法仍然可以得出高分辨率的数值解。

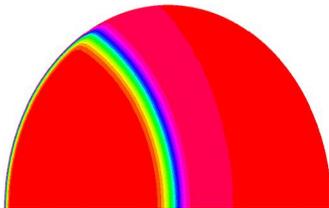


图 3 对流速度 $v = 500$, 二维等值面图

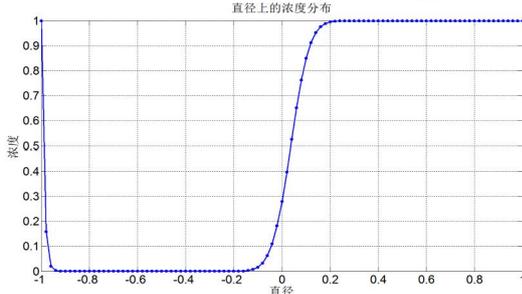


图 4 对流速度 $v = 500$, 直径上的浓度分布

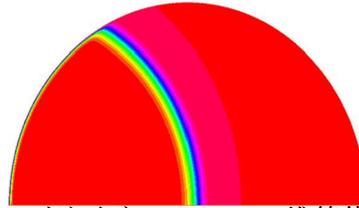


图 5 对流速度 $v = 1000$, 二维等值面图

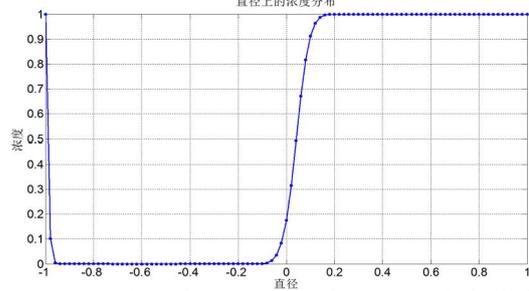


图 6 对流速度 $v = 1000$, 直径上的浓度分布

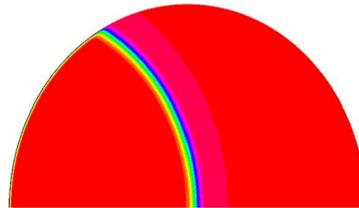


图 7 对流速度 $v = 2000$, 二维等值面图

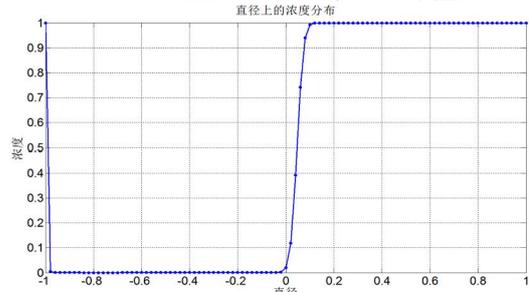


图 8 对流速度 $v = 2000$, 直径上的浓度分布

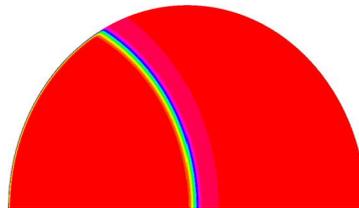


图 9 对流速度 $v = 4000$, 二维等值面图

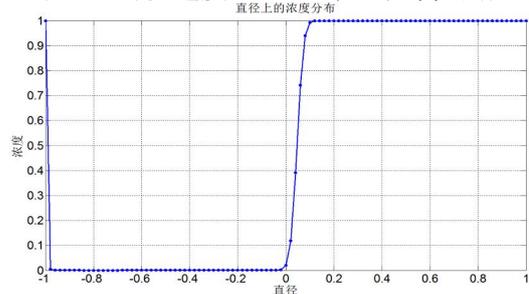


图 10 对流速度 $v = 4000$, 直径上的浓度分布

4 结论

本文给出了求解一类对流占优奇异系数多孔介质方程的局部间断有限元方法。通过对方程等价变形,给出了处理方程奇异系数的方法和详细的局部间断有限元格式。该方法以间断多项式空

间为求解空间,并引入具有稳定机制的对流流量以及扩散流量,可以有效抑制传统有限元方法求解对流占优问题时的数值伪震荡。数值实验表明该方法能有效求解对流占优奇异系数多孔介质方程。

注释及参考文献:

- [1]张国亮,张凤宝,王绍亭,等.用正交配置法求解血液透析超滤的传质动力学模型[J].化工学报,1993,44(5):609-616.
 [2]刘儒勋,舒其望.计算流体力学的若干新方法[M].北京:科学出版社,2003.
 [3]王阿霞,马逸尘.对流占优的扩散问题的局部间断 Galerkin 方法[J].西安交通大学学报,2008,42(2):234-237.

A Local Discontinuous Galerkin Finite Element Method for the Numerical Solution of a Convection-dominated Equation in Porous Media with Singular Coefficient

LIU Hong-xia¹, XU Na²

(1.Department of Basic Courses, Dongguan Polytechnic, Dongguan, Guangdong 523808; 2.CAE Center, Guangzhou Institutes of Advanced Technology, Chinese Academy of Sciences, Guangzhou, Guangdong 511458)

Abstract: A local discontinues Galerkin finite element method for the numerical simulation of a convection-dominated equation in porous media with singular coefficient is studied in this paper, and the scheme of the local discontinuous method is given in detail for the singular equation studied. By rewriting the original equation into proper form and introducing the convective and diffusive numerical fluxes, the method can effectively overcome numerical oscillation occurred in case of convection-dominated problems. Numerical results are also given to show the effectiveness of the method.

Key words: Singular coefficient; Local discontinuous Galerkin finite element; Convection-dominated

(上接22页)

article summarized the definition binary function of limit and their solving method, and explained the detail and techniques which should be paid attention to some specific methods. so that we can understand the function of the various limits, as well as all types of functional limit. Each method of function to limit has its advantages and disadvantages. As for the specific problem of limit, we can choose the best according to its type.

Key words: Binary function; The concept of limit; Theorem; The calculation method of Limit