

# 四阶 Adams-Bashforth 组合公式的预估-校正方法的对比试验\*

刘冬兵

(攀枝花学院 数学与计算机学院, 四川 攀枝花 617000)

**【摘要】**本文研究了由4阶显式的Adams-Bashforth公式与同阶隐式的Adams-Moulton, Hamming和Gear公式组合构造了预估-校正方法, 对它们进行了数值对比试验, 获得了Adams-Bashforth-Hamming预估-校正方法比其它两种方法的计算结果稳定。

**【关键词】**线性多步法; 预估-校正法; 数值试验

**【中图分类号】**O241.81 **【文献标识码】**A **【文章编号】**1673-1891(2012)03-0043-04

## 1 引言

线性多步法公式<sup>[1-12]</sup>是求解常微分方程初值问题 
$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

的经典算法之一, 也是理工类本科生学习《数值计算方法》课程的重要内容, 为今后在实际工作中的科学和工程计算打下基础。它可以通过数值积分法与待定系数法获得不同的格式, 其中线性多步法公式可用如下一般形式表示

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j} \quad (1.2)$$

其中 $\alpha_j, \beta_j$ 均为实常数, 且 $\alpha_k=1, |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$ , 当 $\beta_k=0$ 时为显式方法,  $\beta_k \neq 0$ 时为隐式方法。只要给出 $k$ , 确定对 $\alpha_j, \beta_j$ 的要求, 例如令其中某些参数为零, 就可以通过求解线性方程组<sup>[10]</sup>:

$$\begin{cases} C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 0 \\ C_1 = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k) - (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_k) = 0 \\ \vdots \\ C_p = (\alpha_1 + 2^p\alpha_2 + \dots + k^p\alpha_k) / p! - (\beta_1 + 2^{p-1}\beta_2 + \dots + k^{p-1}\beta_k) / (p-1)! = 0 \\ \vdots \end{cases} \quad (1.3)$$

求出 $\alpha_j, \beta_j$ , 构造出相应的线性多步法的公式。

定义1.1<sup>[10]</sup>: 方法(1.2)为 $p$ 阶的, 如果对于任意函数 $y(x) \in C_{[a,b]}^{p+1}$ , 使得与方法有关的差分算子 $L$ 满足

$$\begin{aligned} L[y(t); h] &= \sum_{j=0}^k \alpha_j y(x_n + jh) - h \sum_{j=0}^k \beta_j y'(x_n + jh) \\ &= C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x_n) + o(h^{p+2}), h \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

这里 $C_{p+1} \neq 0$ , 并称 $C_{p+1}$ 是方法(1.2)的误差常数。

## 2 4阶经典的线性多步法公式

### 2.1 4步4阶显式Adams-Bashforth公式的构造

Adams方法是应用最广泛的多步法, 它们组合成预估-校正算法, 这些算法中的误差由步长及阶的变化所控制, 其中显式的Adams-Bashforth常常作

为预估公式, 下面应用待定系数法推导该公式:

线性4步法一般形式:

$$\sum_{j=0}^4 \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^4 \beta_j f_{n+j} \quad (2.1)$$

令 $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \alpha_4 = 1, \beta_4 = 0$ 有

$$\begin{cases} C_0 = \alpha_3 + 1 = 0 \\ C_1 = \alpha_3 + 4 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = 0 \\ C_2 = \frac{9}{2}\alpha_3 + 8 - \beta_1 - 2\beta_2 - 3\beta_3 = 0 \\ C_3 = \frac{9}{2}\alpha_3 + \frac{32}{3} - \frac{1}{2}\beta_1 - 2\beta_2 - \frac{9}{2}\beta_3 = 0 \\ C_4 = \frac{27}{8}\alpha_3 + \frac{32}{3} - \frac{1}{6}\beta_1 - \frac{4}{3}\beta_2 - \frac{9}{2}\beta_3 = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \frac{9}{2} & 0 & -1 & -2 & -3 \\ \frac{9}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{9}{2} \\ \frac{27}{8} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{4}{3} & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -8 \\ -\frac{32}{3} \\ -\frac{32}{3} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

解之得到:

$$\alpha_3 = -1, \beta_0 = -\frac{9}{24}, \beta_1 = \frac{37}{24}, \beta_2 = -\frac{59}{24}, \beta_3 = \frac{55}{24} \quad (2.4)$$

对应的公式是

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (-9f_{n-3} + 37f_{n-2} - 59f_{n-1} + 55f_n) \quad (2.5)$$

同时还可计算出其局部截断误差主项系数为:

$$C_4 = \frac{251}{720} \quad (2.6)$$

线性多步法的优点在于每次计算量大大减少, 其中4步4阶显式Adams-Bashforth方法实际上只要计算一次函数值, 只有同阶的Runge-Kuuta方法的 $\frac{1}{4}$ 。但是它不能自启动, 需要用同阶的单步法或其它方法启动。

收稿日期: 2012-06-23

\*基金项目: 攀枝花学院教研发改项目(项目编号: JJ1118)。

作者简介: 刘冬兵(1972-), 男, 湖南宁乡人, 硕士研究生, 讲师, 研究方向: 微分方程数值解。

### 2.2 3步4阶隐式Adams–Moulton公式的构造

类似地推导,线性3步法一般形式<sup>[4]</sup>:

$$\sum_{j=0}^3 \alpha_j y_{i+j} = h \sum_{j=0}^3 \beta_j f_{i+j}, i = 0, 1, 2, \dots, n-3 \quad (2.7)$$

令  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0, \alpha_3 = 1$ , 有对应的公式:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(f_{n-2} - 5f_{n-1} + 19f_n + 9f_{n+1}) \quad (2.8)$$

其局部截断误差主项系数为:

$$C_4 = -\frac{19}{720} \quad (2.9)$$

### 2.3 3步4阶隐式Hamming公式的构造

类似地推导,线性3步法一般形式:

$$\sum_{j=0}^3 \alpha_j y_{i+j} = h \sum_{j=0}^3 \beta_j f_{i+j}, i = 0, 1, 2, \dots, n-3 \quad (2.10)$$

令  $\alpha_1 = 0, \alpha_3 = 1, \beta_0 = 0$  有对应的公式:

$$y_{n+1} = \frac{9}{8}y_n - \frac{1}{8}y_{n-2} + \frac{3h}{8}(-f_{n-1} + 2f_n + f_{n+1}) \quad (2.11)$$

其局部截断误差主项系数为:

$$C_4 = -\frac{1}{40} \quad (2.12)$$

### 2.4 3步4阶隐式Gear公式的构造

线性3步法一般形式:

$$\sum_{j=0}^4 \alpha_j y_{i+j} = h \sum_{j=0}^4 \beta_j f_{i+j}, i = 0, 1, 2, \dots, n-4 \quad (2.13)$$

令  $\alpha_4 = 1, \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ , 有对应的公式:

$$y_{n+1} = \frac{48}{25}y_n - \frac{36}{25}y_{n-1} + \frac{16}{25}y_{n-2} - \frac{3}{25}y_{n-3} + \frac{12h}{25}f_{n+1} \quad (2.14)$$

其局部截断误差主项系数为:

$$C_4 = -\frac{12}{125} \quad (2.15)$$

## 3 预估–校正方法

显式公式与隐式公式比较,由于显式公式的局部截断误差大,数值稳定性差,因而较少单独使用,例如4阶显式Adams–Bashforth公式的局部截断误差是4阶隐式Adams–Moulton公式的13.2倍,隐式公式在求解精度上较显式公式有明显的提高,这是采

用隐式方法的主要原因。但是隐式公式要用迭代法计算,大大增加了计算量,因此常常把显式公式与同阶的隐式公式配对使用,即把由显式公式求出的  $y_{n+1}$  (记  $\bar{y}_{n+1}$ ) 作为  $y_{n+1}$  的预估值,然后再代入隐式公式进行校正,求出更接近  $y(x_{n+1})$  的  $y_{n+1}$ ,这样就构成了预估–校正方法,预估–校正方法通常校正一次就能达到收敛精度,一般情况下,每步只需要计算两次函数  $f(x, y)$  的值,而Runge–Kuuta方法每一步需要计算  $f(x, y)$  的次数至少等于方法的阶数。由于  $f(x, y)$  的计算通常是求解问题(1.1)中最费时间的部分,从运行速度上看,预估–校正方法一般要比Runge–Kuuta方法快。如4阶的Adams–Bashforth–Moulton 预估–校正方法比4阶Runge–Kuuta方法快一倍<sup>[11]</sup>,所以,预估–校正方法应用于求解步数较多的情形。在科学和工程计算中有广泛的应用价值。下面给出与4阶显式Adams–Bashforth公式组合的预估–校正方法:

4阶Adams–Bashforth–Moulton 预估–校正方法:

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(-9f_{n-3} + 37f_{n-2} - 59f_{n-1} + 55f_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(f_{n-2} - 5f_{n-1} + 19f_n + 9f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})) \end{cases} \quad (3.1)$$

4阶Adams–Bashforth–Hamming 预估–校正方法:

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(-9f_{n-3} + 37f_{n-2} - 59f_{n-1} + 55f_n) \\ y_{n+1} = \frac{9}{8}y_n - \frac{1}{8}y_{n-2} + \frac{3h}{8}(-f_{n-1} + 2f_n + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})) \end{cases} \quad (3.2)$$

4阶Adams–Bashforth–Gear 预估–校正方法:

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(-9f_{n-3} + 37f_{n-2} - 59f_{n-1} + 55f_n) \\ y_{n+1} = \frac{48}{25}y_n - \frac{36}{25}y_{n-1} + \frac{16}{25}y_{n-2} - \frac{3}{25}y_{n-3} + \frac{12h}{25}f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) \end{cases} \quad (3.3)$$

## 4 数值对比试验

上面给出了3种经典的预估–校正算法,一般文献采用4阶的Runge–Kutta方法启动,本文采用精确解  $y=e^{-150x}$  提供初始启动值  $y_0, y_1, y_2, y_3$ , 分别对试验微分方程:  $y'=-150y, y(0)=1$  作试验,取固定步长  $h=0.01$ ,对比效果如表1。

表1 4阶的预估–校正方法数值结果比较

步长	精确解	Adams–Bashforth–Moulton 预估–校正方法数值解		Adams–Bashforth–Hamming 预估–校正方法数值解		Adams–Bashforth–Gear 预估–校正方法数值解	
		$y_n$	$ y(x_n) - y_n $	$y_n$	$ y(x_n) - y_n $	$y_n$	$ y(x_n) - y_n $
$h=0.01$	$y(x_n)$	$y_n$	$ y(x_n) - y_n $	$y_n$	$ y(x_n) - y_n $	$y_n$	$ y(x_n) - y_n $
0.01	2.2313e-001	2.2313e-001	0	2.2313e-001	0	2.2313e-001	0
0.05	5.5308e-004	-1.6424e-001	1.6480e-001	-1.8528e-001	1.8528e-001	-6.8636e-001	6.8636e-001
0.10	3.0590e-007	-5.9888e-002	5.9888e-002	-5.9366e-002	5.9366e-002	-5.0172e+001	5.0172e+001
0.15	1.6919e-010	2.8258e-001	2.8258e-001	3.3143e-002	3.3143e-002	-3.0668e+003	3.0668e+003
0.20	9.3576e-014	7.6484e-001	7.6484e-001	5.9150e-002	5.9150e-002	-1.8748e+005	1.8748e+005

0.25	2.2204e-016	5.8962e-001	5.8962e-001	2.2771e-002	2.2771e-002	-1.1461e+007	1.1461e+007
0.30	2.2204e-016	-1.3674e+000	1.3674e+000	-2.5763e-002	2.5763e-002	-7.0061e+008	7.0061e+008
0.35	2.2204e-016	-4.7001e+000	4.7001e+000	-3.9046e-002	3.9046e-002	-4.2829e+010	4.2829e+010
0.40	2.2204e-016	-4.8517e+000	4.8517e+000	-1.3573e-002	1.3573e-002	-2.6182e+012	2.6182e+012
0.45	2.2204e-016	5.9443e+000	5.9443e+000	1.8014e-002	1.8014e-002	-1.6005e+014	1.6005e+014
0.50	2.2204e-016	2.8054e+001	2.8054e+001	2.5491e-002	2.5491e-002	-9.7841e+015	9.7841e+015
0.55	2.2204e-016	3.6344e+001	3.6344e+001	7.9538e-003	7.9538e-003	-5.9812e+017	5.9812e+017
0.60	2.2204e-016	-2.0702e+001	2.0702e+001	-1.2529e-002	1.2529e-002	-3.6563e+019	3.6563e+019
0.65	2.2204e-016	-1.6247e+002	1.6247e+002	-1.6606e-002	1.6606e-002	-2.2352e+021	2.2352e+021
0.70	2.2204e-016	-2.5619e+002	2.5619e+002	-4.5821e-003	4.5821e-003	-1.3664e+023	1.3664e+023
0.75	2.2204e-016	2.8429e+001	2.8429e+001	8.6689e-003	8.6689e-003	-8.3528e+024	8.3528e+024
0.80	2.2204e-016	9.1014e+002	9.1014e+002	1.0794e-002	1.0794e-002	-5.1062e+026	5.1062e+026
0.85	2.2204e-016	1.7267e+003	1.7267e+003	2.5818e-003	2.5818e-003	-3.1214e+028	3.1214e+028
0.90	2.2204e-016	4.2420e+002	4.2420e+002	-5.9704e-003	5.9704e-003	-1.9082e+030	1.9082e+030
0.95	2.2204e-016	-4.9018e+003	4.9018e+003	-7.0005e-003	7.0005e-003	-1.9082e+030	1.9082e+030
1.00	2.2204e-016	-1.1222e+004	1.1222e+004	-1.4113e-003	1.4113e-003	-7.1308e+033	7.1308e+033

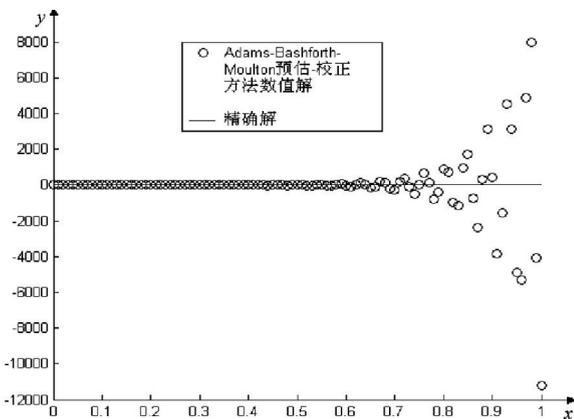


图1 Adams-Bashforth-Moulton 预估-校正方法数值解

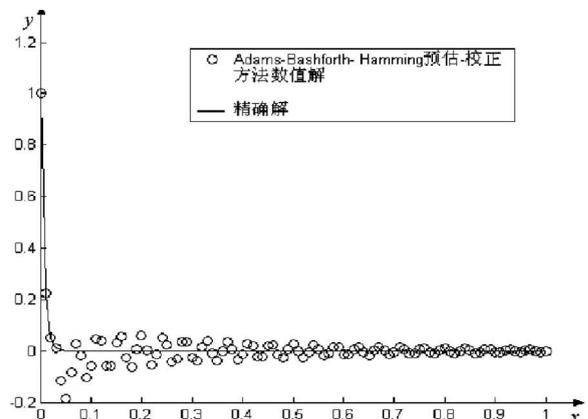


图2 Adams-Bashforth-Hamming 预估-校正方法数值解

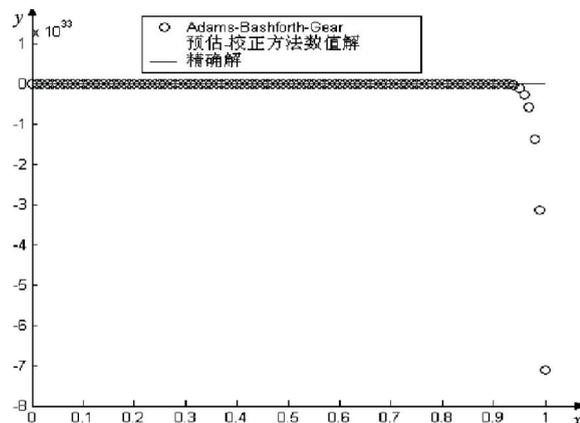


图3 Adams-Bashforth-Gear 预估-校正方法数值解

从表 1, 图 1, 图 2 和图 3 可以看出, Adams-Bashforth-Hamming 预估-校正方法的计算结果稳定, 而 Adams-Bashforth-Moulton 和 Adams-Bashforth-Gear 预估-校正方法的计算结果出现震荡, 不稳定现象, 当  $x_n=1.00$  时, 后者的方法与精确值的误差比

前者远远大许多, 这说明三者的方法中, Adams-Bashforth-Hamming 预估-校正方法比其它两种方法要好。常微分方程初值问题的数值解有很多种方法, 建议使用计算精度较高, 稳定性较好的数值计算方法, 并且有必要使用多种数值方法做对比试验。

**注释及参考文献:**

- [1]何旭初,苏煜城,包雪松.计算数学简明教程[M].北京:高等教育出版社,1980.  
[2]易大义,蒋叔豪,李有法.数值方法[M].杭州:浙江科学技术出版社,1984.  
[3]王能超.数值分析简明教程[M].北京:高等教育出版社,1984.  
[4]李庆扬,王能超,易大义.数值分析(第4版)[M].北京:清华大学出版社,2001.  
[5]丁丽娟.数值计算方法[M].北京:北京理工大学出版社,1997.  
[6]史万民,王开荣.数值分析[M].北京:科学出版社,2006.  
[8]李荣华,冯果忱.微分方程数值解法[M].北京:人民教育出版社,1980.  
[9]薛毅.数值分析与实验[M].北京:北京工业大学出版社,2005.  
[10]李庆扬.常微分方程数值解法(刚性问题与边值问题)[M].北京:高等教育出版社,1992.  
[11]吴勃英.数值分析原理[M].北京:科学出版社,2003.  
[12]J.D.Lambert, Computational methods in ordinary differential equations[M].New York:John wiley and Sons, 1973.

## The Comparative Test of Fourth Order Adams-Bashforth Combination Formula Predictor-corrector Methods

LIU Dong-bing

(Department of Mathematics and Computer, Panzhihua College, Panzhihua, Sichuan 617000)

**Abstract:** This paper studies the predictor-corrector method composed by Adams-Bashforth formula with four-order explicit and the predictor-corrector method composed by Adams-Moulton, Hamming and Gear formulas with the same implicit. The numerical comparative test is implemented between these two methods. Thus it obtains that the calculation result of Adams-Bashforth-Hamming predictor-corrector method is more stabler than the other two methods.

**Key words:** Linear multistep method; Predictor-corrector; Numerical experiment

---

(上接42页)

arguments of the same theorem have different formula series. The formal language and the deductive device not only define for us the tool, the starting point and the basis of the formal argument, but also imply semantically the theoretical object and purpose of the builder, it will lead to illogic to put aside the specific formal system to talk about or argue a theorem.

**Key words:** Formal system; Axiomatic system; System of natural inference; Formal language; Axiom; Rule of transformation